Le codage des nombres

Les nombres à virgule flottante et la norme IEE754

Introduction

Exemples :

- $128{,}75 = 1 \times 10^{2} + 2 \times 10^{1} + 8 \times 10^{0} + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$
- $101{,}01_{2} = 1 \times 2^{2} + 1 \times 2^{0} + 1 \times 2^{-2} = 1 \times 4 + 1 + 0{,}25 = 5{,}25$
- $AE{,}1F_{16} = 10 \times 16^{1} + 14 \times 16^{0} + 1 \times 16^{-1} + 15 \times 16^{-2} = 160 + 14 + 0{,}0625 + 0{,}05859375 = 174{,}1210938$

Conversion en binaire

Exemple : $28{,}8625_{10}$ en binaire

- Conversion de 28 : 11100_2
- Conversion de 0,8625 :
    - 0,8625 x 2 = 1,725 = 1 + 0,725
    - 0,725 x 2 = 1,45= 1 + 0,45
    - 0,45 x 2 = 0,9 = 0 + 0,9
    - 0,9 x 2 =1,8 = 1 + 0,8
    - 0,8 x 2 = 1,6 = 1 + 0,6 …
- $28{,}8625_{10}$= $(11100{,}11011\ldots)_2$

Conversion en hexadécimal

Exemple : $3{,}14159_{10}$ en hexadécimal

- Conversion de 3: 3_{16}
- Conversion de 0,14159:
    - 0,14159 x16 = 2,26544 = 2 + 0,26544
    - 0,26544 x 16 = 4,24704 = 4 + 0,24704
    - 0,24704 x 16 = 3,95264 = 3 + 0,95264…
- $3{,}14159_{10} = (3{,}243\ldots)_{16}$

De nombreux défauts pour la représentation en virgule fixe

- Pour un nombre très grand comme le nombre d'Avogadro N_A (environ $6{,}022\times 10^{23}$) , en écriture décimale cela nécessite au moins 24 chiffres pour une approximation à l’entier près.
- Pour un nombre très petit comme la charge élémentaire d'un électron (environ $-1{,}602 \times 10^{-19}$ Coulombs), en écriture décimale cela nécessite au moins 20 chiffres pour une approximation.

Virgule flottante

- Inspiré de l’écriture scientifique
- Exemple:

  $173{,}95 = + 1{,}7395 \times 10^2$
- Généralisation: soit x un réel

  $$x = \text{signe mantisse x } 10^n$$
- Avantage: permet de représenter des nombres très grands et très petits sans s’encombrer de zéros

Application à la base 2

- L’écriture devient alors:

  signe mantisse x 2^n

  Avec la mantisse et l’exposant en binaire
- A la fin des années 70, chaque ordinateur avait sa propre représentation pour les nombres à virgule flottante. Il y a donc eu la nécessité de normaliser le codage des nombres flottants.

La norme IEEE 754

signe mantisse x 2^n

- Le signe + est représenté par 0 et le signe – par 1
- La mantisse appartient à l’intervalle [1; 2[
- L’exposant est un entier relatif et il est établi de manière à ce que la mantisse soit de la forme « 1,… »

La norme IEEE 754

Plusieurs formats:

- Simple précision : 32 bits (soit 4 octets)

  1 bit de signe, 8 bits d'exposant, 23 bits de mantisse
- Double précision : 64 bits (soit 8 octets)

  1 bit de signe, 11 bits d'exposant, 52 bits de mantisse
- Quadruple précision : 128 bits (soit 16 octets)

  1 bit de signe, 15 bits d'exposant, 112 bits de mantisse

La norme IEEE 754

Simple précision: les caractéristiques

- Exposant (n): de – 126 à 127
- On effectue la somme n + 127 afin de coder l'exposant en binaire
- Mantisse: de 1 à $2\text{-}2^{-23}$
- Plus petit nombre normalisé: 2^{-126}
- Plus grand nombre normalisé: presque 2^{128}
- Les exposants 00000000 et 11111111 sont interdits

La norme IEEE 754

Simple précision: application

Codons le nombre $-6,625$

- $6,625_{10} = 110,1010_2$
- $110,1010 = 1,101010 \times 2^2$
- 10101000000000000000000
- $127 + 2 = 129_{10} = 10000001_2$
- 1 10000001 10101000000000000000000
- En hexadécimal : C0 D4 00 00

La norme IEEE 754

Double précision: les caractéristiques

- Exposant (n): de – 1022 à 1023
- On effectue la somme n + 1023 afin de coder l'exposant en binaire
- Mantisse: de 1 à $2\text{-}2^{-52}$
- Plus petit nombre normalisé: 2^{-1022}
- Plus grand nombre normalisé: presque 2^{1024}

Bibliographie

- Systèmes de numération: http://tic01.tic.ec-lyon.fr/~muller/trotek/cours/numeration/index.html.fr
- ISN - Codage binaire des nombres: http://lycee.lagrave.free.fr/IMG/pdf/codage_binaire_nombres_beamer.pdf
- Nombres fractionnaires en HEXADECIMAL: http://bannaladi.fr/cours/OUTILS/Numeration/Nombres_fractionnaires_hexadecimal.pdf
- Représentation de l'information: http://isn-a-camus.olympe.in/cours%20en%20HTML/priv%C3%A9/sommaire%20representation%20de%20l%20information.html