Des démonstrations

Rappels :

R1) Théorème de Moivre Laplace :

X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p et X suit la loi normale centrée réduite

Pour tous réels a et b, a<b, $\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) = P(a \le X \le b)$

R2) Pour tout réel $\alpha \in]0\,;1[$, il existe un et un seul réel positif noté u_α tel que $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha)=1-\alpha$

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 1-α

Appliquons R1) avec $a=-u_\alpha$ et $b=u_\alpha$ et R2):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-u_\alpha \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$$

or $-u_\alpha \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_\alpha \Leftrightarrow -u_\alpha \le \frac{\frac{1}{n}(X_n-np)}{\frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)}} \le u_\alpha \Leftrightarrow -u_\alpha \le \frac{F_n-p}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}} \le u_\alpha$

$\Leftrightarrow p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow F_n \in \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P\left(F_n \in \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right)\right\} = 1-\alpha$$

et en prenant α=0.05 on a $u_{0.05} \approx 1.96$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P\left(F_n \in \left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right)\right\} = 0{,}95$$

Ce qui signifie que l'intervalle $[\,p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95.

Intervalle de fluctuation au seuil de 0.95 de classe de seconde

Appliquons R1) avec a=-2 et b=2 :

$\lim_{n\to\infty} P\left(-2 \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 2\right) = P(-2 \le X \le 2)$ ≈0,9545 (<0,9545)

or

$-2 \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 2 \Leftrightarrow p-2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p+2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow Fn \in [\,p-2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,]$

or il est aisé de démontrer que, pour tout p ∈ [0 ; 1], $\sqrt{p(1-p)} \le 0{,}5$; on en déduit que :

$[\,p-2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,] \subset [\,p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\,]$

et donc

$\mathrm{P}\left(Fn \in \left[p-2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \le \mathrm{P}(Fn \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right])$

Or le premier membre tend vers 0,9545 et donc à partir d'un certain rang, il sera compris, par exemple, entre 0,9545-0,004=0,9505 et 0,9545+0,004=0,9585

A partir de ce rang, $\mathrm{P}\left(Fn \in \left[p-2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \ge 0{,}9505 \ge 0{,}95$

et donc, à partir de ce rang, $\mathrm{P}\left(Fn \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \ge 0{,}95$

L'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est donc bien un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95.