

Contrôle 2 octobre 2014 terminale S

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition
- 2) Quelle asymptote peut-on en déduire ?
- 3) Calculer $f'(x)$
- 4) Dresser le tableau de variations complet de f sur $]0 ; +\infty[$
- 5) Y a-t-il une autre asymptote ? Justifier votre réponse

Partie B :

- 1) A l'aide, par exemple de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions dans $]0 ; +\infty[$ de l'équation $f(x) = x^2$ (E)

- 2) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et} \\ x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

- 3) Dresser le tableau de variations complet de la fonction g définie sur $]-\infty ; +\infty [$ par $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution dans $]-\infty ; +\infty [$ qui est strictement positive

Partie C :

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$$

- 1) Représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique en annexe où sont tracées la courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x$
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier n positif $u_n > 0$
- 3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis sa limite quand n tend vers $+\infty$
- 4) Que se passe-t-il en prenant $u_0 = -2$?
En supposant que (u_n) converge vers l , quelle équation doit vérifier l ?
Calculer l dans ce cas

Annexe

NOM :

