Contrôle 1 de spécialité septembre 2014

Q1)

Soit P un polynôme dont les coefficients sont entiers, c'est-à-dire :
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots + a_1x + a_0$ où $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$ sont des entiers.
a) On suppose que x est une racine entière de P, c'est-à-dire P(x)=0
Démontrer que $x | a_0$
b) Le polynôme P défini par $P(x) = x^3+4x^2-9$ a-t-il des racines entières ?

a) On a $a_0 = -a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} \dots -a_1x$ car P(x)=0 et comme x divise $-a_nx^n$,$-a_{n-1}x^{n-1}$,…, $-a_1x$ alors x divise $-a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} \dots -a_1x$ c'est-à-dire x divise a_0

On peut aussi écrire $a_0 = x(-a_nx^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} \dots - a_1)$ et comme $-a_nx^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} \dots -a_1$ est un entier , a_0 est un multiple de x.

b) Si ce polynôme a une racine entière elle doit diviser -9 donc doit appartenir à l'ensemble {-9 ;-3 ;-1 ; 1 ; 3 ; 9}

Il suffit alors de tester et on obtient -3 comme seule racine entière

Q2)

Soit n un entier
On note $A=2n^2+3n+3$ et $B=2n+1$
a) Expliquez pourquoi B est impair
b) Développez (2n+1)(n+1)
c) Démontrer que tout entier qui divise A et B, divise 2
d) En déduire que si d est un entier positif qui divise A et qui divise B alors d=1

a) B=2n+1 est la division euclidienne de B par 2 avec 1 comme reste, c'est-à-dire B impair.

b) et c) $(2n+1)(n+1)=2n^2+3n+1$, donc A-(n+1)B=2

Si d est un entier qui divise A et B alors d divise A-(n+1)B , c'est-à-dire d divise 2

d) comme d divise 2 et d positif, alors d=1 ou d=2.

Si d=2 alors 2 diviserait B ce qui est impossible car B impair donc d=1

Voilà ce que donne une feuille de calculs :

n	A	B	pgcd(A,B)
0	3	1	1
1	8	3	1
2	17	5	1
3	30	7	1
4	47	9	1
5	68	11	1
6	93	13	1
7	122	15	1
8	155	17	1
9	192	19	1
10	233	21	1
11	278	23	1
12	327	25	1
13	380	27	1
14	437	29	1
15	498	31	1

16	563	33	1
17	632	35	1
18	705	37	1
19	782	39	1

39	3162	79	1
40	3323	81	1
41	3488	83	1
42	3657	85	1
43	3830	87	1
44	4007	89	1
45	4188	91	1
46	4373	93	1
47	4562	95	1
48	4755	97	1
49	4952	99	1
50	5153	101	1

Q3)

Soit n un entier , démontrer l'équivalence suivante :

3 divise $n^2+2 \Leftrightarrow$ 3 ne divise pas n

Vous procéderez par disjonction des cas.

On procède par disjonction des cas selon le reste de la division euclidienne de n par 3 :

soit $n=3k$ où k est un entier et dans ce cas $n^2+2=9k^2+2 = 3(3k^2)+2$ et 2 est le reste de la division euclidienne de n^2+2 par 3

soit $n=3k+1$ et dans ce cas $n^2+2 = 9k^2+6k+3 = 3(3k^2+2k+1)$ et le reste de la division euclidienne de n^2+2 par 3 est 0

soit $n=3k+2$ et dans ce cas $n^2+2 = 9k^2+12k+6 = 3(3k^2+4k+2)$ et le reste de la division euclidienne de n^2+2 par 3 est 0

Seuls dans les 2 derniers cas (3 ne divise pas n), 3 divise n^2+2