Utilisation des Matrices

1) Système :

L'objectif de l'activité est d'étudier l'existence d'une parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par trois points M, N et P donnés.

1 Dans cette question, on donne $M(-2\,;1)$, $N(-1,-1)$ et $P(3\,;3)$.

a. Montrer qu'il existe une parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points M, N et P si, et seulement si, le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système :

$$(S) : \begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}.$$

b. Justifier que le système (S) est équivalent à l'équation matricielle :

2) Probabilités :

Dans une localité, on suppose que chaque jour, il fait soit sec, soit humide.
On fait l'hypothèse que :

- S'il fait sec un jour, alors il fera encore sec le lendemain avec la probabilité $\frac{5}{6}$.
- S'il fait humide un jour, alors il fera encore humide le lendemain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Un certain dimanche (choisi pour jour 0), il fait sec.

On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec, et h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide.

3) Suites :

76 On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

- la donnée de ses premiers termes u_0 et u_1,
- la relation de récurrence : pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On se propose de calculer l'expression des termes de cette suite par une méthode matricielle.

ou encore

Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}$

Calculer u_6 et v_6.

4) <u>Arithmétique</u> :

96 Un exemple de chiffrement de Hill

On s'intéresse ici à un chiffrement bigraphique, c'est-à-dire que les lettres seront groupées deux par deux. (On peut imaginer des chiffrements où les lettres seront regroupées par paquets plus grands.)

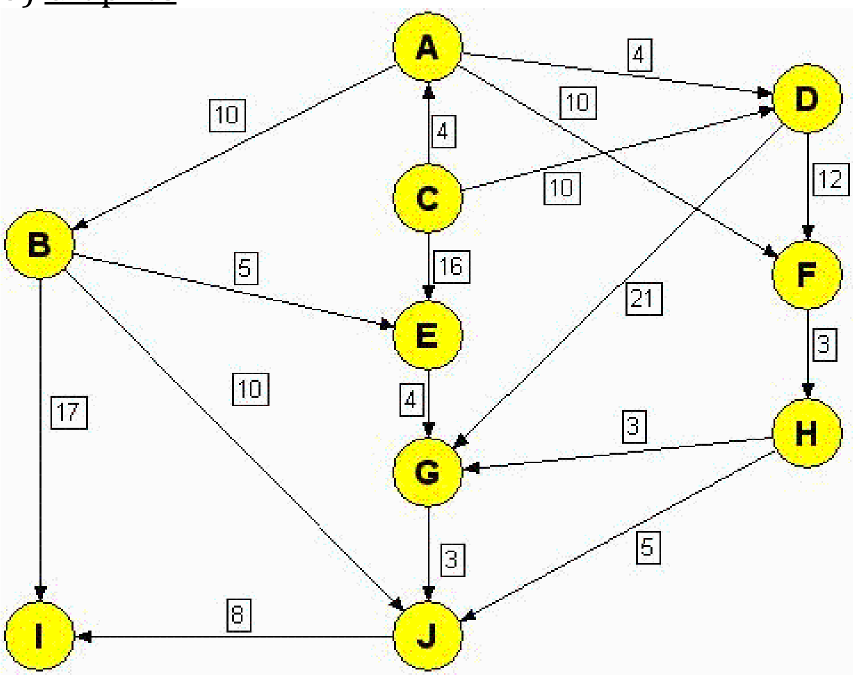
On remplace les lettres par leur rang dans l'alphabet :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Les rangs R_k et R_{k+1} des lettres du texte clair sont chiffrées C_k et C_{k+1} à l'aide du système suivant dans lequel a, b, c, d désignent des entiers naturels donnés :

$$\begin{cases} C_k & \text{est le reste de la division euclidienne de } (aR_k + bR_{k+1}) \text{ par } 26 \\ C_{k+1} & \text{est le reste de la division euclidienne de } (cR_k + dR_{k+1}) \text{ par } 26 \end{cases}$$

5) <u>Graphes</u> :



6) <u>Marches aléatoires</u> :

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur 3 cases notées A,B et C.
A l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :

- Si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant (n + 1), elle est :

    soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$

    soit en C avec une proba égale à $\frac{2}{3}$.

- Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant (n + 1), elle est :

    soit en C, soit en A de façon équiprobable.

- Si à l'instant n la puce est en C, elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement " à l'instant n la puce est en A" (respectivement en B, en C
On note a_n (respectivement b_n et c_n) la proba de l'événement A_n (respectivement B_n, C_n).
On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$