

Polycopié

10)

$$(S) \begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$$

On combine les 2 équations afin d'éliminer une des 2 inconnues

On multiplie la première par i et on soustrait, on élimine z et il reste z'

On les additionne, on élimine z' et il reste z

$$(S) \begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -iz' - z' = -1 - 1 \\ z + iz = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{-2}{-1-i} = 1 - i \\ z = \frac{1+i}{1+i} = 1 \end{cases}$$

De même

$$(S') \begin{cases} 2z + z' = 1 - i \\ z - iz' = 0 \end{cases}$$

On multiplie la deuxième par 2 et on soustrait, on élimine z et il reste z'

On multiplie la première par i et on les additionne, on élimine z' et il reste z

$$(S') \begin{cases} z' + 2iz' = 1 - i \\ 2iz + z = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{1-i}{1+2i} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ z = \frac{1+i}{1+2i} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i \end{cases}$$

13)

$$a) -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

donc

$$(-1 + i)^5 = 4\sqrt{2} e^{\frac{15i\pi}{4}} = 4\sqrt{2} e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

$$b) \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}$$

donc

$$(\sqrt{3} - i)^4 = 16e^{\frac{-4i\pi}{6}} = 16e^{\frac{-2i\pi}{3}}$$

$$c) 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

donc

$$(1 + i\sqrt{3})^3 = 8e^{\frac{3i\pi}{3}} = 8e^{i\pi} = -8$$