Compléments sur les suites

En Terminale S, le théorème : « Une suite croissante majorée converge » est admis.
Mais comment se démontre-t-il ?

D'abord voyons plusieurs notions :

(1) Deux suites sont dites adjacentes quand l'une croît, l'autre décroît, et la différence tend vers 0.

(2) Une suite est dite de Cauchy quand, pour tout réel strictement positif e, on peut trouver un rang N à partir duquel 2 termes quelconques de la suite ont un écart inférieur à e.
C'est-à-dire : $\forall e>0$, $\exists N$ tel que : $m \geq N$, et $n \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| < e$.

(3) Quand une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est majorée, on appelle borne supérieure de A, quand elle existe, le plus petit des majorants de A.

Remarques :

Une suite qui converge est de Cauchy mais la réciproque est fausse.
La borne supérieure de A, notée sup(A), quand elle existe, peut être caractérisée par :

$$\forall a \in A, a \leq \sup(A)$$
$$et \quad \forall e > 0, \exists a \in A \; tel \; que \; a > \sup(A) - e$$

Les propositions suivantes pour des suites de réels sont équivalentes

(i) Toute suite croissante majorée converge
(ii) Toute suite de Cauchy converge
(iii) Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure
(iv) Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Il suffit donc que l'une soit vraie pour que les autres le soient !
Et justement, l'une de ces propositions est une conséquence directe de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.
Elles sont donc toutes les 4 vraies pour des suites de réels.
On peut aussi démontrer que $\mathbb{R}$ est le seul corps totalement ordonné qui vérifie (iii)

Il y a 2 constructions principales de $\mathbb{R}$:

La première, à partir des suites de Cauchy de rationnels
Un réel est alors un ensemble de suites de Cauchy de rationnels pour lequel, deux suites de cet ensemble ont une différence qui tend vers 0 et on peut prendre l'une de ces suites pour le représenter.
On peut identifier un rationnel q, à la suite de Cauchy constante (q), et de cette manière un rationnel est un réel.
Par cette construction, dont on trouve plus de détails en ligne, la proposition (ii) en est une conséquence.

La deuxième, à partir des rationnels : coupure de Dedekind.
Un réel est vu comme un ensemble de rationnels.
Par cette construction, dont on trouve aussi plus de détails en ligne, la proposition (i) en est une conséquence.

Compléments

Les suites sont particulièrement importantes dans les ***espaces métriques***.
Elles permettent de caractériser tout un tas de propriétés.
Un espace métrique est muni d'une ***distance*** d(x,y) qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Par exemple dans $\mathbb{R}$, la distance est $d(x, y) = |x - y|$.
Mais on peut concevoir d'autres distances, et aussi des distances sur d'autres ensembles, comme les ensembles de suites ou de fonctions.
A une telle distance correspond une notion de limite.
Dans un espace métrique, un point est adhérent à un ensemble si et seulement si il est limite d'une suite d'éléments de cet ensemble.
L'adhérence d'un ensemble A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.
On a A $\subset \overline{A}$, et A $=\overline{A}$, si et seulement si A fermé.
(La notion d'***ouvert*** et de ***fermé*** permet de définir une ***structure topologique*** d'un ensemble, en particulier dans le cas des espaces métriques dont la distance permet de définir les ouverts.)

On dit que A est ***dense*** dans E, où E est un espace métrique, quand $\overline{A}$=E.
Un espace métrique est dit ***complet*** quand toute de suite de Cauchy converge.
C'est donc le cas de $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle définie plus haut.
Ce n'est pas le cas de $\mathbb{Q}$.
Par contre, tout réel est limite d'une suite de rationnels, autrement dit $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Sources :

Un document pour le CAPES de maths réalisé par **Nicole Bopp**, qui propose des démonstrations
http://www-irma.u-strasbg.fr/~bopp/CAPES/cours/demo-analyse.pdf

Un cours de topologie de l'université de Lyon par **Simon Masnou**
http://math.univ-lyon1.fr/~masnou/fichiers/cours/CoursTopologie-14-15.pdf

Un cours complet sur la construction de $\mathbb{R}$ (première méthode) par **Abdellah Bechata**
http://abdellah.bechata.free.fr/telechargement/p_adique/pdf/construction_R.pdf

Un cours de l'université de Toulouse sur $\mathbb{R}$ et sur sa construction par les coupures
http://www.math.univ-toulouse.fr/~barthe/L1math2/2010-PolyL1-chapitre4.pdf

Quelques exercices sur les suites en L1, université de Lille
http://math.univ-lille1.fr/~bodin/exo4/selcor/selcor10.pdf

D'autres plus difficiles en CPGE au Puy de Dôme
http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/Suites%20num%C3%A9riques.pdf

Un cours sur les corps totalement ordonnés et $\mathbb{R}$, par **Gérard Eguether**
http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/CQ.pdf