Contrôle 6 Février 2018 TES

Exercice 1

1] $g(1) = 8 \qquad g'(1) = 8$

2] $g(x) \geqslant 0 \iff x \in [\alpha ; 19]$ $(0 < \alpha < 0,5)$ ("Partie de $\mathcal{C}_g$ au dessus l'axe des abscisses")

$g'(x) \geqslant 0 \iff x \in]0 ; 7,4]$ (intervalle où g est croissante)

$g(x) < x \iff x \in]0;a[\cup]b;21]$ $(0 < a < 0,5)$ et $(14,5 < b < 15)$ ("Partie de $\mathcal{C}_g$ strictement en dessous Δ d'équation $y = x$")

3] a) $g'(x) = a\left[(3 - b\ln x) - \frac{b}{x} \times x\right] = a\left[3 - b\ln x - b\right] = a\left[3 - b(1 + \ln x)\right]$

b) $g(1) = 8 \iff -4 + a(3 - b\underbrace{\ln 1}_{0}) = 8 \iff -4 + 3a = 8 \iff a = 4$

$g'(1) = 8 \iff a\left[3 - b(1 + \underbrace{\ln 1}_{0})\right] = 8 \iff a(3 - b) = 8$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = -1 \end{array}}$

Exercice 2

1] a) $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \boxed{x = \frac{1}{e}} \approx 0,368$

b) comme $x > 0$, $f(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff \boxed{x > \frac{1}{e}}$

2] Calculons $f'(x)$

$$f'(x) = 2\left[\frac{\frac{1}{x} \times x - 1(1 + \ln x)}{x^2}\right] = \frac{2(1 - 1 - \ln x)}{x^2} = \boxed{\frac{-2\ln x}{x^2}}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $-2\ln x$ pour $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$-2\ln x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

$$f(1) = \frac{2(1 + \ln(1))}{1} = 2$$

3] a) D'après 1] b) $f(x) > 0$ pour $x > \frac{1}{e}$ or $\frac{1}{e} \approx 0,368$

C'est à dire que l'entreprise doit fabriquer au moins $\boxed{\text{368 objets}}$ pour avoir un bénéfice positif (en fait $0,368 > \frac{1}{e}$ donc $f(0,368) > 0$)

b) Le bénéfice est maximal pour $x = 1$ (1000 objets fabriqués) d'après 2]

et ce bénéfice maximal est 2 soit $\boxed{2000 €}$