Questions de cours ou démonstrations exigibles en terminale S

Elles sont repérées dans le programme officiel par un petit logo qui ressemble un peu à cela « $\boxed{\square}$ » mais en plus petit et qui se trouvent dans la colonne « Capacités attendues »

1) Si u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang et (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Indication :

Il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme [A ;+∞[contient tous les termes de (v_n) à partir d'un certain rang.
On utilise alors les hypothèses :
d'une part un tel intervalle contient tous les u_n à partir d'un certain rang et d'autre part v_n est supérieur à u_n à partir d'un certain rang.

2) Si q>1 alors la suite (q^n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Indication :

On démontre par récurrence que $(1+a)^n \geq 1+na$ où a un réel positif.
Ensuite on écrit q=1+a avec a>0 et on utilise un théorème de comparaison.

3) Unicité d'une fonction dérivable sur IR, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

Indication :

On démontre d'abord qu'une telle fonction f ne s'annule pas ; pour cela on utilise la fonction auxiliaire g : $g(x) = f(x)f(-x)$ et on démontre que g est constante g(x)=1 (g'=0)
Ensuite, pour l'unicité, on prend 2 telles fonctions f1 et f2 et on démontre que f1=f2.
Pour cela on utilise la fonction auxiliaire $h(x) = \frac{f1(x)}{f2(x)}$ et on fait comme pour g.

4) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Indication :

Pour la première on utilise un théorème de comparaison :
On démontre que $e^x \geq x$ à l'aide des variations de la fonction $f(x) = e^x - x$
Pour la deuxième, on pose $X = -x$ et on se ramène à la première en utilisant $e^{-X} = \frac{1}{e^X}$

5) Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c sont trois réels non tous nuls.

Soit (P) le plan qui contient le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Etape 1

On démontre d'abord $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow M \in$ (P)

$\Leftarrow$

Soit M un point de (P)
Si A=M alors $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Si A≠M alors (AM) est une droite de (P) et comme $\vec{n}$ est un vecteur normal de (P) , alors $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ et donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Rightarrow$

Soit M un point qui vérifie $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Considérons le projeté orthogonal, noté H, de M sur le plan (P)
On a $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \overrightarrow{AH}.\vec{n} + \overrightarrow{HM}.\vec{n}$ et comme H est sur le plan (P), d'après la première implication, on a $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = 0$, et comme $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, on en déduit que $\overrightarrow{HM}.\vec{n} = 0$
Or il existe un réel x tel que $\overrightarrow{HM} = x\vec{n}$ car H est le projeté orthogonal de M sur (P) et $\vec{n}$ est un vecteur normal de (P).
On a donc $x\,\vec{n}.\vec{n}$= 0 et donc $x = 0$ car $\vec{n}$ est un vecteur non nul et $\vec{n}.\vec{n}$= $\|\vec{n}\|^2$.
Ce qui donne $\overrightarrow{HM} = \vec{0}$ soit M=H
M est donc un point de (P)

<u>Etape 2</u>
Le repère est supposé orthonormé.
A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) non toutes nulles car $\vec{n}$ est un vecteur non nul.
M de coordonnées $(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ d'après l'étape 1.
$\Leftrightarrow$ a(x-x_A)+b(y-y_B)+c(z-z_A)=0 avec l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé
$\Leftrightarrow$ ax+by+cz+d=0 avec d=-ax_A-by_A-cz_A
On a donc caractérisé les points de (P) par une relation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c sont trois réels non tous nuls.

6) Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
On démontre le sens non trivial :
Considérons 2 droites d1 et d2 sécantes de (P) et orthogonales à (Δ).
On prend des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ de d1 et $\overrightarrow{u_2}$ de d2 qui forment une base de (P).
Pour toute autre droite (d) de (P) on considère un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de cette droite.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont donc coplanaires et par hypothèse , $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc il existe 2 réels x et y tels que $\overrightarrow{u}$ = $x\,\overrightarrow{u_1} + y\,\overrightarrow{u_2}$.
Il suffit alors d'utiliser le produit scalaire avec un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de (Δ).
On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$=$x\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{v} = 0$ car, par hypothèse, $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{v}$ et donc $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{v} = 0$
On en déduit donc que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et donc que (d) est orthogonale à (Δ).

7) Si deux évènements A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B le sont.
<u>Indication :</u>
On démontre que $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A})p(B)$ en utilisant $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
et la formule des probabilités totales : $p(B) = p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B)$

8) L'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$
<u>Indication :</u>

Il s'agit de démontrer que $\lim_{x \to \infty} \int_0^x \lambda\, t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$
Pour cela on doit trouver une primitive de la fonction $g : g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$
On utilise le fait qu'une telle primitive G est de la forme $G(t) = (at + b)e^{-\lambda t}$
où a et b sont 2 réels à déterminer.

9) Pour $\alpha \in]0\,;1[$, il existe un et seul réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ où X suit la loi normale centrée réduite.

Indication :

On remarque que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 2\,P(0 \leq X \leq u_\alpha)$
Le problème posé revient à résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'équation
$P(0 \leq X \leq x) = \frac{1-\alpha}{2}$
or la fonction F définie par $F(x) = P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ est la primitive de la densité de la loi normale centrée réduite qui s'annule en 0.
On établit ensuite le tableau de variations complet de F sur $[0\,;+\infty[$ et on utilise le théorème des valeurs intermédiaires avec $\lambda = \frac{1-\alpha}{2}$

10) $\lim_{n \to +\infty} P\left(F_n \in \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ,\ p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$
où $F_n = \frac{X^n}{n}$ et X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
(α et u_α sont ceux de 9))

Indication :

$F_n \in \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow X_n \in \left[np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)}, np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}\right]$ car $F_n = \frac{X_n}{n}$
donc $P\left(F_n \in \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right)$
$= P\left(X_n \in \left[np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)}, np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}\right]\right)$
$= P(Z_n \in [-u_\alpha, u_\alpha])$ où $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
or $\lim_{n \to +\infty}\left(P(Z_n \in [-u_\alpha, u_\alpha])\right) = P(Z \in [-u_\alpha, u_\alpha])$, où Z suit la loi normale centrée réduite , d'après le théorème de Moivre Laplace.
Mais $P(Z \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 1-\alpha$ d'après le cours.
donc $\lim_{n \to +\infty} P\left(F_n \in \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ,\ p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$ (c.q.f.d.)