

Exercice 1

1) $100 - 2 = 98 = 7 \times 14 \Rightarrow 100 \equiv 2(7)$

$10^{2n} = (10^2)^n = 100^n \equiv 2^n(7)$ et $7 \equiv 0(7)$

donc $30x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \Rightarrow 30x^2 \equiv 2^n(7)$

2)

x	0	1	2	3	4	5	6	(7)
$30x^2$	0	3	5	6	6	5	3	(7)

3) $2^3 \equiv 1(7)$

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
2^n	$(2^3)^k$	$(2^3)^k \times 2$	$(2^3)^k \times 4$
	$\equiv 1(7)$	$\equiv 2(7)$	$\equiv 4(7)$

On a donc des solutions car il n'y a pas de couple (x, n) tel que $30x^2 \equiv 2^n(7)$ car $30x^2$ est congru à 0, 3, 5 ou 6 (7) et 2^n est congru à 1, 2, 4 (7)

Exercice 2

1) $2009 \mid 11$
 $2009 \mid 182$

$2009 \equiv 7(11)$

2) $2^{10} \equiv 1(11)$

$2009 = 200 \times 10 + 9 \Rightarrow 2^{2009} \equiv 2^9(11) \equiv 6(11)$

3) $2^{2009} + 2009 \equiv 13(11) \equiv 2(11)$

Exercice 3

1) $10^3 = 1000$ $10^3 + 1 = 1001 = 7 \times 143 \Rightarrow 10^3 \equiv -1(7)$

2) $7 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0(7) \Leftrightarrow b - a \equiv 0(7)$ or $N \equiv b - a(7)$
 $\Leftrightarrow (a, b) \in \{(1, 8), (2, 9), (7, 0), (8, 1), (9, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$

$(1, 8) : N = 1008 = 7 \times 144$

$(2, 9) : N = 2009 = 7 \times 287$

$(7, 0) : N = 7000 = 7 \times 1000$

$(8, 1) : N = 8001 = 7 \times 1143$

$(9, 2) : N = 9002 = 7 \times 1286$

$(1, 1) : N = 1001 = 7 \times 143$

$(2, 2) : N = 2002 = 7 \times 286$

$(3, 3) : N = 3003 = 7 \times 429$

$(4, 4) : N = 4004 = 7 \times 572$

$(5, 5) : N = 5005 = 7 \times 715$

$(6, 6) : N = 6006 = 7 \times 858$

$(7, 7) : N = 7007 = 7 \times 1001$

$(8, 8) : N = 8008 = 7 \times 1144$

$(9, 9) : N = 9009 = 7 \times 1287$