Correction du contrôle n°6 de Février 2014 — Tale S

Exercice 1

(0,5) **2]** a) $p(B_n) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car les tirages sont indépendants

b) $p(U_n) = \binom{n-1}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ car le nombre X de boules blanches

(1) tirées lors des $n-1$ premiers tirages suit la loi $\mathcal{B}\left(n-1\,;\,\frac{1}{3}\right)$

et $U_n =$ « $X = 1$ »

$p(U_n) = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(0,5) c) $p_n = p(U_n \cap B_n) = p(U_n) \times p(B_n)$ car les tirages sont indépendants

$$= \frac{n-1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3} \qquad \left(\begin{array}{l} 2^{n-2} = \frac{2^n}{4} \\ 3^{n-2} = \frac{3^n}{9} \end{array}\right)$$

$$= (n-1) \times 2^{n-2} \times \frac{1}{3^2 \times 3^{n-2}}$$

$$= (n-1) \times \frac{2^n}{4} \times \frac{1}{3^n}$$

(1)
$$= \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

3] a) $P(n)$: « $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ »

- $S_2 = p_2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ et $1 - \left(\frac{2}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

  donc $P(2)$ est vraie

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons $P(n)$ vraie (HR)

  et démontrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire

  $p_2 + p_3 + \dots + p_{n+1} = 1 - \left(\frac{n+1}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ (C)

  Or $p_2 + p_3 + \dots + p_{n+1} = S_n + p_{n+1}$

$$\overset{\text{avec (HR)}}{=} 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{n+1-1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\frac{n}{2} + 1 - \frac{n}{4} \times \frac{2}{3}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\frac{n}{3} + 1\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{3} + 1\right) \times \frac{3}{2}$$

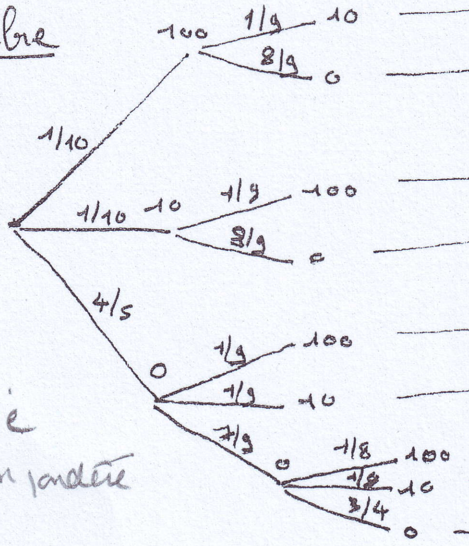
$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{2} + 1\right) \quad \text{cqfd}$$

- $P(n)$ est vraie au rang 2 et est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$

Exercice 2

1] Arbre



X	probabilités
110	1/90
100	8/90 = 4/45
110	1/90
10	8/90 = 4/45
100	4/45
10	4/45
100	28/360 = 7/90
10	28/360 = 7/90
0	84/180 = 7/15

2

1 principe

1 si non pondéré

---

loi de X

x_i	0	10	100	110	total
p_i	$\frac{7}{15}$	$\underbrace{\frac{4}{45}+\frac{4}{45}+\frac{7}{90}}_{=\frac{23}{90}}$	$\underbrace{\frac{4}{45}+\frac{4}{45}+\frac{7}{90}}_{=\frac{23}{90}}$	$\underbrace{\frac{1}{90}+\frac{1}{90}}_{=\frac{1}{45}}$	$\underbrace{\frac{7}{15}+\frac{23}{90}+\frac{23}{90}+\frac{1}{45}}_{=\frac{42+23+23+2}{90}} = \frac{90}{90} = 1$

2

(0,5 chaque)

(1 principe)

2] On cherche m tel que $E(X) = m$

or $E(X) = 10\times\frac{23}{90} + 100\times\frac{23}{90} + 110\times\frac{1}{45} = \frac{230+2300+220}{90} = \frac{2750}{90} = \boxed{\frac{275}{9}} \simeq 30,5$

1

donc $m = \boxed{\frac{275}{9} \simeq 30,56}$

(0,5 principe)

3] Considérons le succès $\boxed{S = \text{« } X \geqslant 100 \text{ »}}$

$p(S) = p(X=100) + p(X=110)$

$= \frac{23}{90} + \frac{1}{45}$

$= \frac{25}{90} = \boxed{\frac{5}{18}}$

2 → 0,5 $X \geqslant 100$

On a donc un schéma de Bernoulli

0,5 de paramètres $\left(\boxed{10\,;\ \frac{5}{18}}\right)$

1 $p(\text{"avoir au moins un succès"}) = 1 - p(\text{"avoir 0 succès"})$

$= 1 - \left(1 - \frac{5}{18}\right)^{10}$

$= 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^{10}$

$\simeq \boxed{0,961}$

Problème

Partie I

1 (0,25 résultat) 1) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

1 (0,25 résultat) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,5 2) et 3) $g'(x) = -[(2x-2)e^{-x} - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}] = (x^2 - 4x + 4)e^{-x} = (x-2)^2 e^{-x}$

0,5

0,5 si justifié

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de g'	+	0	+
g	$-\infty$	$\nearrow$	1

1 4) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $0 \in]-\infty, 1[$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, notée α, dans $\mathbb{R}$.

0,5 Par balayage $\alpha \in [0{,}35 ; 0{,}36]$ et le signe de g se déduit du tableau précédent :

5)

0,5

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de g		$-$	0	+	

Partie II

1 (0,25 résultat) 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$

0,5 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car, pour $x \in]-\infty;0[$, $e^{-x} \geq 1$ et $x^2 + 2 \geq 0$ donc $f(x) \geq x^2 + x + 1$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$

0,5 (0,25 résultat)

1 2) et 3) $f'(x) = 1 + [2x - (x^2 + 2)]e^{-x} = g(x)$ d'où les variations de f :

0,5 si justifié

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

1 4) de $g'(\alpha) = 0$ on trouve $1 - (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 0$ et donc $(\alpha^2 + 2)e^{-\alpha} = 1 + 2\alpha e^{-\alpha}$

d'où $f(\alpha) = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha} = \alpha(1 + 2e^{-\alpha}) \approx 0{,}84$ en prenant $\alpha \approx 0{,}35$

Supprimées

5) $f(x) - (x - 1) = (x^2+2)e^{-x}$ donc (Δ) est asymptote à (C) en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+2)e^{-x} = 0$

et (Δ) est en dessous (C) car $(x^2+2)e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6) (T) a pour équation $y = 1 - x$

Correction contrôle 6 spécialité Tle S

sur 10 $\xrightarrow{\times 2}$ /20 **Chiffrement de Hill**

$\boxed{A}$ $y_2 - y_1 \equiv 6x_1 + 2x_2\ (26)$

$\equiv 2(3x_1 + x_2)\ (26)$

1 • si $3x_1 + x_2 = 13$ Alors $y_2 - y_1 \equiv 0\ (26)$

et donc $y_2 = y_1$ car y_1 et y_2 sont dans $\{0, \dots, 25\}$

0,5 • en prenant $x_1 = 1$ (B) on trouve $x_2 = 10$ (K)

on a $y_1 \equiv 4 + 30\ (26)$ et $y_2 \equiv \underbrace{10 + 50}_{60}\ (26)$

$\equiv 8\ (26)$ (I) $\qquad \equiv 8\ (26)$ (I)

(B, K) $\mapsto$ (I, I)
(B, C) $\to$ (K, U)   (O, C)

0,25 $\Rightarrow$ De même $(1, 2)$ et $(14, 2)$ se codent de la même façon $(10, 20)$

$\boxed{B}$ 1) $A \times B = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \boxed{25\, Id(3)}$

1

$A \times \left(\frac{1}{25} B\right) = Id(3) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{25} B = \begin{pmatrix} \frac{13}{25} & \frac{5}{25} & -\frac{8}{25} \\ \frac{22}{25} & -\frac{5}{25} & -\frac{2}{25} \\ -\frac{27}{25} & \frac{5}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$

---

1 (0,5 résultat seul) 2) on trouve $\boxed{x = 25}$ $\quad 25 \times 25 = 625 \equiv 1\ (26)$

1 3) • Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on a $Y \equiv AX\ (26)$

1 On obtient $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ Q \\ P \end{pmatrix}$

• $A \times B = 25\, Id \Rightarrow A \times 25B \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (26)$ car $25 \times 25 \equiv 1\ (26)$

2 $25B = \begin{pmatrix} 325 & 125 & -200 \\ 550 & -125 & -50 \\ -675 & 125 & 175 \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 21 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 21 & 19 \end{pmatrix}}_{C} (26)$

donc $A \times \boxed{C} \equiv Id(3)\ (26)$

• Le système de décodage est donc

1 $\boxed{\begin{cases} x_1 \equiv 13y_1 + 21y_2 + 8y_3\ (26) \\ x_2 \equiv 4y_1 + 5y_2 + 2y_3\ (26) \\ x_3 \equiv y_1 + 21y_2 + 19y_3\ (26) \end{cases}}$ car $Y \equiv AX\ (26) \Leftrightarrow X \equiv CY\ (26)$

en prenant $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$, on calcule $CY = \begin{pmatrix} 521 \\ 130 \\ 626 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} (26)$

1 donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Remarque $Y_1 = Y_2 \Leftrightarrow Y_1 \equiv Y_2\ (26) \Leftrightarrow AX_1 - AX_2 \equiv 0\ (26) \Leftrightarrow A(X_1 - X_2) \equiv 0\ (26)$
$\Leftrightarrow X_1 - X_2 \equiv C \times 0\ (26) \Leftrightarrow X_1 = X_2$ donc 2 triplets de lettres différents sont codés en 2 triplets de lettres différents mais une même lettre selon le triplet où elle se