

Exercice 1 [5] + 11

0,5 A) a) $u = -3 + 3i$: $|u| = 3\sqrt{2}$ $\theta = \text{Arg}(u) = 3\pi/4 \Rightarrow u = 3\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$

car $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1 + 0,5 b) $z = \frac{6\sqrt{2}e^{i\pi/12}}{3\sqrt{2}e^{3i\pi/4}} = 2e^{-8i\pi/12} = 2e^{-2i\pi/3} = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - i\sqrt{3}$

1 c) $uz = (-3 + 3i)(-1 - i\sqrt{3}) = (3 + 3\sqrt{3}) + i(-3 + 3\sqrt{3})$

1 donc $e^{i\pi/12} = \frac{uz}{6\sqrt{2}} = \left(\frac{3+3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{-3+3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

0,5 or $e^{i\pi/12} = \cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$ donc $\begin{cases} \cos(\pi/12) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin(\pi/12) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

1 ou c) 1,5 ou 2 pour une autre méthode

B) 1) $z^2 - 8z + 64 = 0$
 (coefficients réels)

$\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64$
 Il y a 2 solutions complexes conjuguées

1
 0,5 si non simplifié
 0,5 si on ne simplifie pas

$z_1 = 8 + i8\sqrt{3} = 4 + 4i\sqrt{3}$
 $z_2 = \bar{z}_1 = 4 - 4i\sqrt{3}$

1 2) $z_c = 8e^{-i\pi/3} = 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 - 4i\sqrt{3}$

1 $z_D = 8ie^{2i\pi/3} = 8i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\sqrt{3} - 4i$

1 3) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 8$ ($|z_C| = |z_A|e^{-i\pi/3}$ et $|z_D| = |z_B|e^{2i\pi/3}$)
 donc A, B, C, D sont sur la circonférence de centre O et de rayon 8

0,5 + 0,5 a) $z_1 = z_c - z_A = -4 - 4i\sqrt{3}$ $z_2 = z_D - z_B = -4\sqrt{3} - 12i$

0,5 $\sqrt{3}z_1 = -4\sqrt{3} - 4i\sqrt{2}\sqrt{3} = -4\sqrt{3} - 12i = z_2$

0,5 + 0,5 b) $z_3 = z_D - z_A = -8 + 8i$ $z_4 = z_c - z_B = (4 + 4\sqrt{3}) + i(-4\sqrt{3} + 4)$

$|z_3|^2 = 64 + 64 = 128$ $|z_4|^2 = (4 + 4\sqrt{3})^2 + (-4\sqrt{3} + 4)^2 = 16 + 48 + 32\sqrt{3} + 48 + 16 - 32\sqrt{3} = 128$

0,5 ou détaille donc $|z_3| = |z_4|$

0,5 c) de a) $\vec{BD} = \sqrt{3} \vec{AC}$ donc $\vec{BD}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et $(BD) \parallel (AC)$

0,5 de b) $AB = DC$

donc ABDC est un parallélogramme de bases $[BD]$ et $[AC]$

$$1 \Rightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{CD}) = -(\vec{u}, \vec{AB}) + (\vec{u}, \vec{CD}) = \text{Arg}(\frac{\vec{CD}}{\vec{AB}}) - \text{Arg}(\frac{\vec{AB}}{\vec{AD}}) = \text{Arg}\left(\frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} \cdot \frac{\vec{AD}}{\vec{AD}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{\vec{CD} \cdot \vec{AD}}{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}\right)$$

donc

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \text{Arg}\left(\frac{(-4-4\sqrt{3}) + i(4\sqrt{3}-4)}{-8+8i}\right)$$

$$= \text{Arg}\left(\frac{(-1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}{-2+2i}\right)$$

multiplier par le conjugué

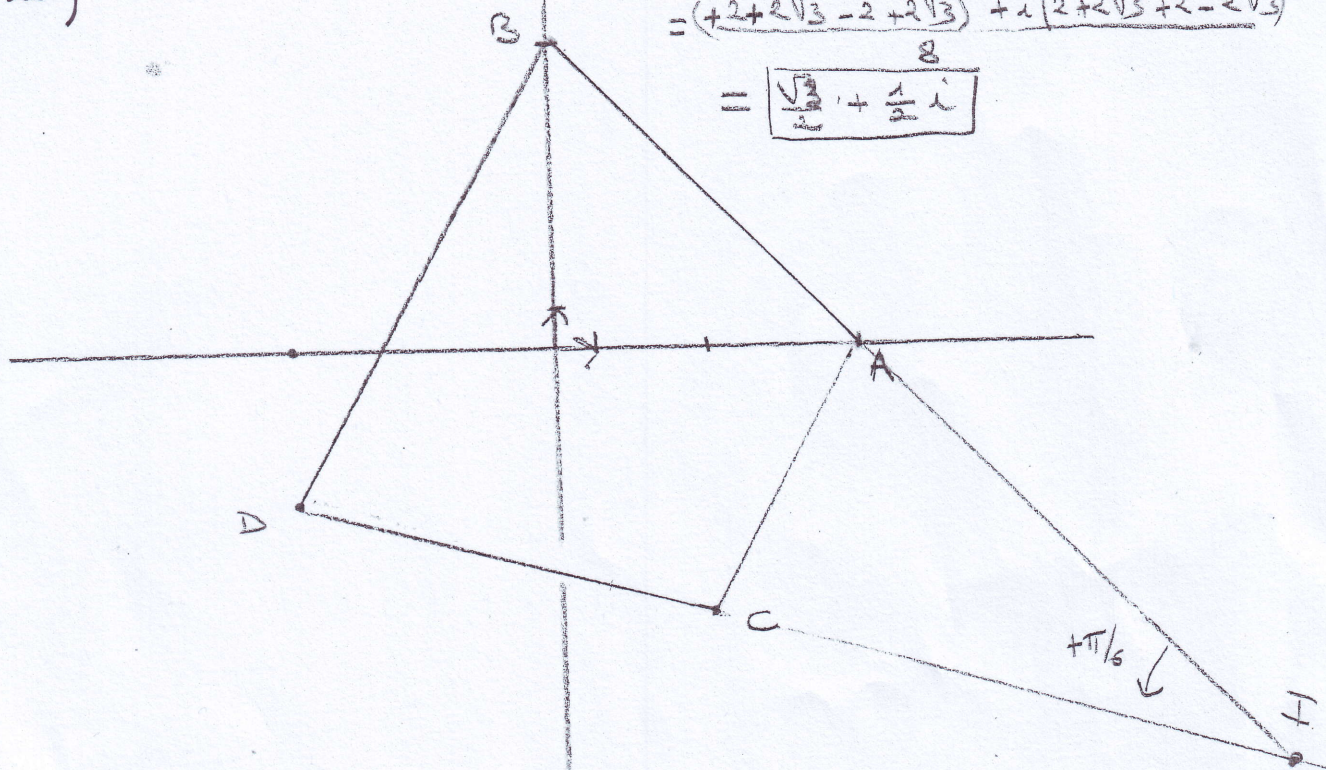
$$\frac{(-1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}{-2+2i} \cdot \frac{(-1-\sqrt{3}) - i(\sqrt{3}-1)}{(-2+2i)(-2-2i)}$$

$$= \frac{(+2+2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}) + i(2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3})}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

2

$$(0,5 \text{ rom } \pi/6 \text{ ou } 180^\circ) = \boxed{\pi/6}$$



Exercice 2

4

$$1) \boxed{e^{i\alpha} \times e^{i\pi/4} = e^{i(\alpha+\pi/4)}} = \cos(\alpha+\pi/4) + i \sin(\alpha+\pi/4)$$

2) ou $e^{i\alpha} e^{i\pi/4} = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\cos \alpha - \sin \alpha) + i(\cos \alpha + \sin \alpha)]$

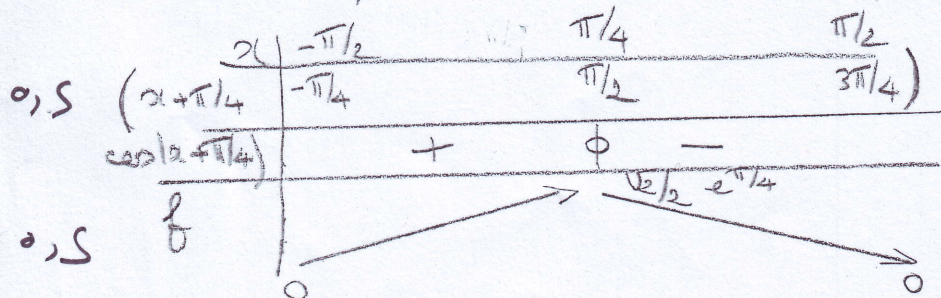
l'utilisation des nombres complexes

d'où $\cos(\alpha+\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$

$$2) f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x) = \boxed{\sqrt{2} e^x \cos(x+\pi/4)}$$

0,5 + 0,5

donc $f'(x)$ est du signe de $\cos(x+\pi/4)$



Polynésie Juin 2012

0,5 A] 1) $25 \times 13 - 108 \times 3 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ y_0 \end{pmatrix}$ solution de (E)

2) (x, y) solution de (E) $\Rightarrow 25(x - x_0) = 108(y - y_0)$ (E')

* $\begin{cases} 108 = 25 \times 4 + 8 \\ 25 = 8 \times 3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 108 \mid x - x_0 \\ 25 \mid y - y_0 \end{cases}$ car $108 \mid 25(x - x_0)$ et 108 premier avec 25 *

1

(théorème de Gauss)

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 108k$

et $y - y_0 = 25k$ en utilisant (E')

Réciproquement

0,5

$(x, y) = (x_0 + 108k, y_0 + 25k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 25(x_0 + 108k) - 108(y_0 + 25k) = 25x_0 - 108y_0 = 1$

$\Rightarrow (x, y)$ solution de E

(E) a pour solutions les couples de la forme $\begin{pmatrix} x_0 + 108k \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 + 25k \\ 3 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z}$

1

B] 1) $\begin{cases} x \equiv a(7) \\ x \equiv a(19) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \mid x - a \\ 19 \mid x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \times 19 \mid x - a \end{cases} \Rightarrow x \equiv a(7 \times 19) \mid 133$
car 7 et 19 sont premiers entre eux

0,5 2) 1) a n'est pas un multiple de 7 $\Rightarrow a$ premier avec 7 car 7 est premier
 $\Rightarrow a^6 \equiv 1(7)$ (petit théorème de Fermat)

0,5

$\Rightarrow a^{108} = (a^6)^{18} \equiv 1(7)$

$\Rightarrow (a^{25})^8 = a^{25 \times 8} = a^{200} = a^{1+198} = a \times (a^{198})^1 \equiv a(7)$

1

2) a est un multiple de 7 $\Rightarrow a \equiv 0(7)$

$\Rightarrow (a^{25})^8 \equiv 0(7)$

$\Rightarrow (a^{25})^8 \equiv a(7) \quad (\equiv 0(7))$

1

3) En posant $x = (a^{25})^8$ et en utilisant 1) on en déduit que $(a^{25})^8 \equiv a(7)$

1

C] 1) $a^{25} \equiv r(133) \Rightarrow (a^{25})^{13} \equiv r^{13}(133) \Rightarrow (a^{25})^{13} \equiv r_1(133)$ car $r^{13} \equiv r_1(13)$

où on sait que $(a^{25})^8 \equiv a(133)$ où g vérifie $25g - 108c = 1$

1

en posant $g = 13$ (Partie A 1)) on obtient $(a^{25})^{13} \equiv a(133)$

et comme $(a^{25})^{13} \equiv r_1(133)$

on a $\boxed{r_1 \equiv a(133)}$

1 2) $128 \xrightarrow{\text{décodage}} 128^{13} \equiv 2(133)$ donc $a = 2$

1 $59 \longrightarrow 59^{13} \equiv 3(133)$ donc $a = 3$