

Exercice 1 (Pondichéry Juin 2004)

A) a) On peut appliquer la méthode du Δ car ces coefficients sont réels
 $\Delta = 4 - 16 = -12$ donc l'équation a 2 solutions complexes conjuguées

$$\frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} \text{ et } 1 - i\sqrt{3} \text{ donc } z' = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z'' = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z' = 2e^{i\pi/3} \text{ car } |z'| = 2 \quad \cos \pi/3 = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z'' = 2e^{-i\pi/3} \text{ car } z'' = \overline{z'}$$

$$b) z'^{2004} = 2^{2004} e^{i668\pi} \quad -\pi < 668\pi + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 < 668 + 2k \leq 1 \\ \Leftrightarrow -334.5 < k \leq -333.5 \\ \Leftrightarrow k = -334$$

(On peut remarquer aussi que $668\pi = 334 \times (2\pi)$)

B) $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$ donc A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 2

Exercice 2 (Métropole sept 2007)

$$a) Z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2 + 2i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(2 - 2i)}{8} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{8} + i \left(\frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{8} \right) = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2})}{4} + i \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} \right)$$

$$b) z_1 = \sqrt{8} e^{i\pi/6} \quad \text{car } |z_1| = \sqrt{8} \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \sqrt{8} e^{i\pi/4} \quad \text{car } |z_2| = \sqrt{8} \quad \cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z = e^{i(\pi/3 - \pi/4)} = e^{i\pi/12} = \cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)$$

$$\text{donc } \cos(\pi/12) = \operatorname{Re}(Z) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin(\pi/12) = \operatorname{Im}(Z) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$c) Z^{2007} = e^{2007 i \pi/12} = e^{i669\pi/4} \quad -\pi < \frac{669\pi}{4} + 2k\pi \leq +\pi \Leftrightarrow -1 < \frac{669}{4} + 2k \leq +1$$

$$\Leftrightarrow -84.125 < k \leq -83.125$$

$$\Leftrightarrow k = -84$$

$$\text{mesure principale} = \left(\frac{669}{4} - 2 \times 84 \right) \pi = -3\pi/4$$

$$= e^{-3i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 3

$$a) e^{3i\theta} = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

$$(e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \left[(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + 2i \cos \theta \sin \theta \right] [\cos \theta + i \sin \theta]$$

$$= \left[\cos \theta (\cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta) - 2 \cos \theta \sin^2 \theta \right] + i \left[\sin \theta (\cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta) + 2 \cos^2 \theta \sin \theta \right]$$

En égalisant les parties réelles on a

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos \theta (\cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta) - 2 \cos \theta \sin^2 \theta \\ &= \cos \theta (2 \cos^3 \theta - 1) - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

b) en utilisant a) on obtient

$$\cos(\pi/3) = 4 \cos^3 \pi/9 - 3 \cos \pi/9 \text{ soit } 4 \cos^3 \pi/9 - 3 \cos \pi/9 = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } x \text{ vérifie } 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Exercice 4 (Polytechnique 2011)

$$1] OA^2 = |z_A|^2 = 29 \quad OB^2 = |z_B|^2 = 58 \quad AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |5 + 2i|^2 = 29$$

on a $OA = AB$ et $OA^2 + AB^2 = OB^2$ donc OAB rectangle d'hypoténuse en A VERITE

$$2] M \in \Delta \Leftrightarrow AM = BM \text{ où } A \text{ a pour affixe } i \text{ et } B \text{ a pour affixe } -2i$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{Médiane de } [AB]$$

donc $\Delta = \text{Médiane de } [AB]$ or $(AB) = \text{axe des ordonnées}$ et comme $\Delta \perp (AB)$

alors $(\Delta) \parallel \text{axe des abscisses}$ VERITE

$$3] z^{3n} = (z^3)^n = \left[(3+i\sqrt{3})^3 \right]^n \text{ car } (3+i\sqrt{3})^3 = (3+i\sqrt{3})^2 (3+i\sqrt{3})$$

$$= (6 + 6i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})$$

$$= (18 - 18) + i(24\sqrt{3})$$

$$= 24\sqrt{3}i$$

$$= 24\sqrt{3} e^{i\pi/2}$$

$$\text{or } i^n = \pm 1 \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$= \pm i \text{ si } n \text{ est impair}$$

donc z^{3n} est soit réel soit imaginaire pur FAUSSE

$$4] \text{ Si } \arg(z) = \pi/2 \text{ alors } z = ki \text{ avec } k \text{ réel strictement positif}$$

$$|1+z| = |(1+k)i| = 1+k \text{ car } k > 0$$

VERITE

$$1+|z| = 1+|ki| = 1+k \text{ car } k > 0$$

$$5] \text{ Si } |z| = 1 \text{ on a } z = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = (\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) + \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)$$

$$= e^{2i\theta} + \overline{e^{2i\theta}}$$

$$= 2 \operatorname{Re}(e^{2i\theta})$$

$$= 2 \cos 2\theta \in \mathbb{R}$$

VERITE