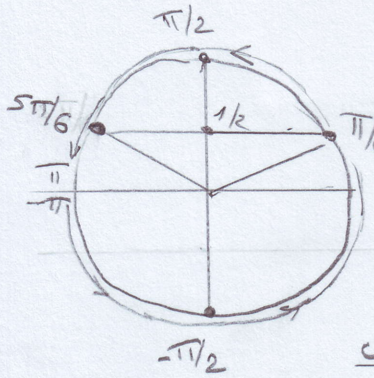
Correction du contrôle n°4 (succincte) Décembre 2013

Exercice 1

1) $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos x$

$= -2(2\sin x\cos x) + 2\cos x$

$= \boxed{-4\cos x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)}$



En s'aidant du cercle trigonométrique, les valeurs remarquables sont $-\pi/2$, $\pi/2$ pour lesquelles le cosinus s'annule et $\pi/6$, $5\pi/6$ pour lesquelles le sinus vaut $1/2$

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\sin x - \frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	1

$f(-\pi) = \underbrace{\cos(-2\pi)}_{1} + 2\underbrace{\sin(-\pi)}_{0} = 1$

$f(-\pi/2) = \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + 2\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1} = -3$

$f(\pi/6) = \underbrace{\cos\pi/3}_{1/2} + 2\underbrace{\sin\pi/6}_{1/2} = 1,5$

$f(\pi) = \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + 2\underbrace{\sin\pi}_{0} = 1$ $\quad f(\pi/2) = \underbrace{\cos\pi}_{-1} + 2\underbrace{\sin\pi/2}_{1} = 1$ $\quad f(5\pi/6) = \underbrace{\cos(5\pi/3)}_{1/2} + 2\underbrace{\sin(5\pi/6)}_{1/2} = 1,5$

Exercice 2 (Amérique du Sud novembre 2006)

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = +\infty$ car $n>0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x) = -\infty}$

$\forall x \in]0,+\infty[$ $\boxed{f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}} > 0$ pour tout $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

donc f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

b)

x	0		α_n		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $0\in]-\infty,+\infty[$ image de $]0,+\infty[$ par f_n, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x)=0$ n'a qu'une seule solution, α_n, dans $]0,+\infty[$

De plus $f_n(1/e) = \underbrace{\ln(1/e)}_{-1} + \frac{1}{en} - 1 = \boxed{-2 + \frac{1}{en} < 0}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$en > 1 \Rightarrow \frac{1}{en} < 1 \Rightarrow -2 + \frac{1}{en} < -1$

$f_n(e) = \underbrace{\ln(e)}_{1} + \frac{e}{n} - 1 = \boxed{\frac{e}{n} > 0}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

donc $\alpha_n \in \left]\frac{1}{e}; e\right[$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

---

2) a) $f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln(\alpha_n) = 1 - \frac{\alpha_n}{n}}$

b) $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 \underset{a)}{=} 1 - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \alpha_n\left(\frac{-1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{-\alpha_n}{n(n+1)}}$

et comme $\alpha_n > 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ alors $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

c) $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ donc $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, alors $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ et cela pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

d) D'après c) (α_n) est croissante et d'après 1) b) majorée par e, donc (α_n) converge

Correction contrôle 4 spécialité **Décembre 2013** TeS

(centres étrangers Juin 2006)

A)

1) $4 \equiv 1\ (3) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\quad 4^n \equiv 1^n\ (3)$ c'est à dire $4^n \equiv 1\ (3)$

2) 29 est premier et 4 est premier avec 29 donc $4^{28} \equiv 1\ (29)$ d'après le petit théorème de Fermat, et donc $4^{28} - 1$ divisible par 29

3)

$n =$	1	2	3	4
$4^n =$	4	16	64	256
$\equiv$	4	16	13	1

modulo 17

$\Rightarrow 4^{4k} = (4^4)^k \equiv \overbrace{1^k}^{1}\ (17)$

$\Rightarrow 4^{4k} - 1$ divisible par 17

4) $4^2 = 16 \equiv 1\ (5)$ donc

$n \equiv$	0	1	modulo 2
$4^n \equiv$	1	4	modulo 5

$n = 2k \Rightarrow 4^n = (4^2)^k \equiv \underbrace{1^k}_{1}\ (5)$

$n = 2k+1 \Rightarrow 4^n = (4^2)^k \times 4 \equiv 4\ (5)$

donc $4^n - 1$ divisible par 5 $\Leftrightarrow$ n pair

5) En prenant $n = 28$, $4^{28} - 1$ divisible par 3 d'après 1)
divisible par 29 d'après 2)
divisible par 17 d'après 3) car $28 = 4 \times 7$
divisible par 5 d'après 4) car 28 est pair

B)

1) p est un nombre premier autre que 2 donc 4 est premier avec p et donc, d'après le petit théorème de Fermat $4^{p-1} \equiv 1\ (p)$

2) (Si on note (E) l'ensemble des entiers strictement positifs x tels que $4^x \equiv 1\ (p)$, cet ensemble est non vide d'après 1) donc admet un plus petit élément)

a) $n = bq + r \Rightarrow 4^n = (4^b)^q \times 4^r$ et comme $4^n \equiv 1\ (p)$ et $4^b \equiv 1\ (p)$ on obtient $4^r \equiv 1\ (p)$. Si $r > 0$ alors r serait dans l'ensemble (E) et on aurait $r \geq b$ car b est le plus petit élément de (E).
Or $r \geq b$ contredit le fait que r est le reste de la division euclidienne de n par b : $r < b$
Donc $r = 0$, car r ne peut pas être strictement positif

b) $4^n - 1$ divisible par $p \Leftrightarrow 4^n \equiv 1\ (p) \underset{\text{d'après a)}}{\Longrightarrow} b$ divise n $(r = 0)$

Réciproquement si b divise n ($n = qb$, $q \in \mathbb{N}^*$) alors $4^n = (4^b)^q \equiv \underbrace{1^q}_{1}\ (p)$

c) En prenant $n = p - 1$, 1) et avec 2)b) on en déduit que b divise $p - 1$