Contrôle n°4 — T^{a}S — (1)

Correction — Décembre 2012

1] $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x-1)^2 + (\sin x - 0)^2 = (x-1)^2 + \sin^2 x$

2] a) $\forall x \in [0, \pi/2]$ $f'(x) = 2(x-1) + 2\sin x \times \cos x$

$$f''(x) = 2 + 2(\cos x \cos x - \sin x \sin x)$$
$$= 2 + 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= 2 + 2\cos(2x)$$

b) $x \in [0, \pi/2] \Rightarrow 2x \in [0, \pi]$

Comme $\cos(2x) > -1$ pour tout x appartenant à $[0, \pi/2[$

et $\cos(2x) = -1$ pour $x = \pi/2$

on en déduit le signe de $f''(x)$

x	0		$\pi/2$
$f''(x)$		$+$	0
$f'(x)$	-2	$\nearrow$	$\pi - 2$

$f'(0) = -2 < 0$

$f'(\pi/2) = 2(\pi/2 - 1) > 0$
$= \pi - 2$

c) f' est strictement croissante et continue sur $[0; \pi/2]$ et 0 appartient à l'image de $[0, \pi/2]$ par f' qui est $[-2, \pi-2]$, donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une seule solution α dans $[0, \pi/2]$

Avec la calculatrice $\alpha \in [0; 1]$ puis $\alpha \in [0,5; 0,6]$

3] a) On déduit des questions précédentes le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $[0; \pi/2]$

x	0		α		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$		$\nearrow$	$(\pi/2 - 1)^2$

b) Or comme AM est positif, AM est minimale quand AM^2 l'est, c'est à dire quand $f(x)$ l'est.

Donc AM est minimale pour $x = \alpha$, on notera M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α

4] On se rappelle que $f'(\alpha) = 0$ soit $2(\alpha - 1) + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$ ou $\cos\alpha\sin\alpha = 1 - \alpha$

(AM_0) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_{M_0} - y_A}{x_{M_0} - x_A} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha - 1} = m$

T_{M_0} = tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 a pour coefficient directeur $\sin'(\alpha) = \cos\alpha = m'$

$mm' = \dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{\alpha - 1} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha - 1} = -1$ et comme le repère est orthonormé

on en déduit que les deux droites (AM_0) et T_{M_0} sont perpendiculaires

1] $\forall x \geq 0 \quad f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} > 0 \Rightarrow f_1$ strictement croissante sur $[0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f_1(x)$	-2 $\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-2) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2+1) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ (composée)

car en posant $X = x^2+1 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$ par règles opératoires

2] a) $f_n'(x) = 2 + \frac{2x}{n(x^2+1)} > 0$ pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

donc f_n strictement croissante sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b)

x	0	α_n	$+\infty$
$f_n(x)$	-2 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

comme dans 1] $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x^2+1)}{n} \right) = +\infty$ car $n > 0$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

f_n est strictement croissante et continue sur $[0, +\infty[$ et 0 appartient à l'image de $[0; +\infty[$ par f_n qui est $[-2, +\infty[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, notée α_n, dans $[0, +\infty[$

c) $f_n(1) = \frac{\ln 2}{n} > 0$ et $f_n(0) = -2$ donc $\alpha_n \in]0; 1[$

x	0	α_n	1
f_n	<0 $\nearrow$	0 $\nearrow$	>0

3] $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\ln(x^2+1)}{n+1} < \frac{\ln(x^2+1)}{n} \Rightarrow f_{n+1}(x) < f_n(x)$ pour tout x dans $[0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$(x \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2+1) \geq 0)$

en prenant $x = \alpha_{n+1}$ on obtient $\underbrace{f_{n+1}(\alpha_{n+1})}_{0 \text{ par définition de } \alpha_{n+1}} < f_n(\alpha_{n+1})$ soit $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4] a) f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (Avec l'indication)

et comme $f_n(\alpha_{n+1}) > \underbrace{f_n(\alpha_n)}_{0}$ (d'après 3) alors $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) Avec 3] (α_n) est majorée par 1 et avec 4] a) (α_n) est croissante donc (α_n) converge vers une limite ℓ ($\ell \leq 1$ et $\ell > 0$ car $(\alpha_n) \nearrow$ donc $\forall n \ \alpha_n > \alpha_0 > 0$)

c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ car $f_n(\alpha_n) = 0$

$\alpha_n \to \ell \qquad \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} \to 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln(\alpha_n^2+1)) = \ln(\ell^2+1) > 0$

donc $\boxed{\ell = 1}$