

Correction

Décembre 2012

$$\boxed{1} AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (\cos - 1)^2 + (\sin \alpha - 0)^2 = (\cos - 1)^2 + \sin^2 \alpha$$

$$\boxed{2} \forall \alpha \in [0, \pi/2] f'(x) = 2(x-1) + 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} a) f''(x) &= 2 + 2(\cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha) \\ &= 2 + 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= 2 + 2 \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

$$b) \alpha \in [0, \pi/2] \Rightarrow 2\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow \cos(2\alpha)$$

Comme $\cos(2\alpha) > -1$ pour tout α appartenant à $[0, \pi/2]$

et $\cos(2\alpha) = -1$ pour $\alpha = \pi/2$

on déduit le signe de $f''(x)$

| | | | |
|--------------------|---------------|----------------------|---|
| $\frac{x}{f''(x)}$ | $\frac{c}{+}$ | $\frac{\pi/2}{\phi}$ | $f''(0) = -2 < 0$ |
| | | $\rightarrow \pi/2$ | $f'(0) = 2(\pi/2 - 1) > 0$ $= \pi - 2$ |

c) f' est strictement croissante et continue sur $[0, \pi/2]$ et 0 appartient à l'image de $[0, \pi/2]$ par f' qui est $[-2, \pi - 2]$, donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une seule solution α dans $[0, \pi/2]$

Avec la calculatrice $\alpha \in [0, 1]$ puis $\alpha \in [0, 5, 0, 6]$

3) a) on déduit des questions précédentes le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $[0, \pi/2]$

| | | | |
|-------------------|---------------|-----------------------|-----------------------------|
| $\frac{x}{f'(x)}$ | $\frac{0}{-}$ | $\frac{\alpha}{\phi}$ | $\frac{\pi/2}{+}$ |
| f | \downarrow | | $\rightarrow (\pi/2 - 1)^2$ |

b) Or comme AM est positif, AM est minimale quand AM^2 l'est, c'est à dire quand $f(x)$ l'est.

Donc AM est minimale pour $x = \alpha$, on notera M_0 le point de C_b d'abscisse α

4) On se rappelle que $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2(\alpha - 1) + 2\sin \alpha \cos \alpha = 0$ ou $\cos \alpha \sin \alpha = 1 - \alpha$

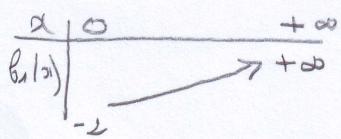
$$(AM_0) \text{ a pour coefficient directeur } \frac{y_{M_0} - y_A}{x_{M_0} - x_A} = \frac{\sin \alpha}{\alpha - 1} = m$$

T_{M_0} = tangente à C_b en M_0 a pour coefficient directeur $\sin'(\alpha) = \cos \alpha = m'$

$$m'm' = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\alpha - 1} = \frac{1 - \alpha}{\alpha - 1} = -1 \text{ et comme le repère est orthonormé}$$

on en déduit que les deux droites (AM_0) et T_{M_0} sont perpendiculaires

1) $\forall x \geq 0 \quad f'_1(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} > 0 \Rightarrow f_1$ strictement croissante sur $[0, +\infty]$



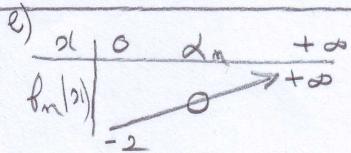
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ (composée)}$$

$$\text{car en posant } X = x^2 + 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} X < +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty \text{ par règles opératoires}$$

2) a) $f_m'(x) = 2 + \frac{2x}{m(x^2+1)} > 0$ pour tout $x \geq 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

donc f_m strictement croissante sur $[0, +\infty]$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$



$$\text{comme dans 1) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2+1)}{m} \right) = +\infty \text{ car } m > 0$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

f_m est strictement croissante et continue sur $[0, +\infty]$ et 0 appartient à l'image de $[0; +\infty]$ pour que soit $[-2, +\infty]$, donc l'équation $f_m(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, notée d_m , dans $[0, +\infty]$

c) $f_m(-1) = \frac{\ln 2}{m} > 0$ et $f_m(0) = -2$ donc $d_m \in]0; 1[$ (

3) $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\ln(x^2+1)}{n+1} < \frac{\ln(x^2+1)}{n} \Rightarrow f_{n+1}(x) < f_n(x)$ pour tout x dans $[0, +\infty]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 $(x \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2+1) \geq 0)$

en prenant $x = d_{n+1}$ on obtient $f_{n+1}(d_{n+1}) < f_n(d_{n+1})$ donc $f_n(d_{n+1}) > 0$
par définition de d_{n+1}

4) a) f_m est strictement croissante sur $[0, +\infty]$ (Avec l'indication)

et comme $f_m(d_{n+1}) > f_m(d_n)$ alors $d_{n+1} > d_n$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
du avis 3

b) Avec 3) (d_m) est majorée par 1 et avec 4) a) (d_m) est croissante donc (d_m) converge vers une limite l ($l \leq 1$ et $l > 0$ car $d_m \nearrow$ donc $\forall n \quad d_m > d_n \geq 0$)

c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_m = 1 - \frac{\ln(d_m^2+1)}{2n} \quad \text{car } f_m(d_m) = 0$

$$\downarrow$$

$$\downarrow \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(d_m^2+1) = \ln(l^2+1) > 0.$$

donc $\boxed{l=1}$