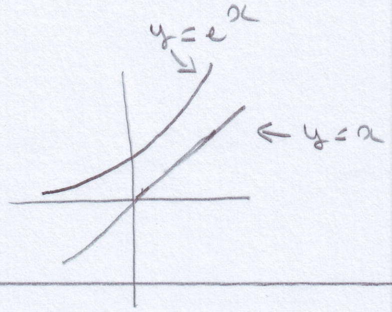
Correction du contrôle n°3 | Novembre 2013 | $T^a S$

## A]

1) 


En utilisant le graphique, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x > x$

et donc $\quad e^x - x > 0$

2) $\forall x \in [0, +\infty[ \quad \boxed{g'(x) = -e^{-x} - 1}$

$g'(x) < 0$ pour $x \in [0, +\infty[$ car $e^{-x} > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g$ | $1$ | $0$ | $-\infty$ |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$g$ est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $0 \in ]-\infty, 1]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans $[0, +\infty[$, notons la $\alpha$

$\boxed{\alpha \in [0,5 ; 0,6]}$ avec la calculatrice

## B]

1) $f(x) = \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} \underbrace{\left( \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \right)}_{\to 1} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ (On a une asymptote d'équation $y = 0$)

quand $x \to +\infty$ $\left( \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{x}{e^x} \right) = 0 \quad \text{(cours)} \right)$

$f(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{e^x}{x}} \begin{matrix} \to 1 \\ \to -1 \end{matrix}$ quand $x \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

(On a une asymptote d'équation $y = -1$) $\left( \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \right.$ par règles opératoires$\left. \right)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{(e^x - x) - (e^x - 1)(x + 1)}{(e^x - x)^2}$

$$= \frac{e^x - x - xe^x - e^x + x + 1}{(e^x - x)^2}$$

$$= \frac{-xe^x + 1}{(e^x - x)^2}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $-xe^x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ car le dénominateur est strictement positif

Pour $x \leq 0$ $\quad -xe^{x} \geq 0$ donc $f'(x) > 0$

Pour $x > 0$ $\quad f'(x)$ est du signe de $g(x)$ d'où le signe de $f'(x)$

Pour $x \in \mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

signe de $g(x)$

On a donc

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-1$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

$\alpha \simeq 0,6$

$f(\alpha) \simeq 1,3$ avec la calculatrice

---

<u>Complément</u>

Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad -xe^{x} + 1 \geq 0 \iff xe^{x} \leq 1$

$\iff x \leq e^{-x}$ $\quad$ en divisant par $e^{x} > 0$

$\iff e^{-x} - x \geq 0$

et $\quad -xe^{x} + 1 = 0 \iff e^{-x} - x = 0$

Autrement dit, <u>pour tout $x \in \mathbb{R}$</u> $\quad -xe^{x} + 1$ est du signe de $e^{-x} - x$

(et pas seulement pour $x > 0$)

d) Il s'agit donc de trouver les couples solutions de (E)

avec $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$

| | $k$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 10+7k$ | $x$ | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 |
| $y = 15+11k$ | $y$ | 4 | 15 | 26 | 37 | 48 |

pour $k = 4$ $y > 50$

2) a) $11x^2 = 5 + 7y^2$

$\equiv 0 + 2y^2 \ (5)$ car $5 \equiv 0 \ (5)$ et $7 \equiv 2 \ (5)$

$\equiv 2y^2 \ (5)$

Mais $11 \equiv 1 \ (5)$ donc $11x^2 \equiv x^2 \ (5)$

donc si $(x, y)$ solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2 \ (5)$

b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 (5) |

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| $2y^2$ | 0 | 2 | 3 | 3 | 2 (5) |

c) si $(x, y)$ solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2 \ (5)$ d'après a)

et d'après b) $x^2 \equiv 2y^2 \ (5)$ pour $x \equiv 0 \ (5)$ et $y \equiv 0 \ (5)$

c'est à dire $x$ et $y$ multiples de 5

3) Supposons $x$ et $y$ multiples de 5

il existe 2 entiers $k$ et $k'$ tels que $x = 5k$ et $y = 5k'$

On a alors $11x^2 - 7y^2 = 25(11k^2 - 7k'^2)$

et $11x^2 - 7y^2 = 5 \Leftrightarrow 5\underbrace{(11k^2 - 7k'^2)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$ ce qui

est impossible car 1 n'est pas un multiple de 5

(F) n'a donc pas de solution