Exercice 1

A] 1] c) Il semblerait que (y_n) soit croissante et convergente vers 2

2] $f'(x) = -0,4x + 1$

x	0		2
$f'(x)$		+	
f	0,8	↗	2

$\Rightarrow$ Si $x \in [0;2]$ Alors $f(x) \in [0,8;2]$ et à fortiori $f(x) \in [0;2]$

b) et c)

Soit $P(n)$ la proposition « $0 \leq y_n \leq y_{n+1} \leq 2$ »

- $P(0)$ vraie car $y_0 = 0$ et $y_1 = f(y_0) = 0,8$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie, c'est à dire $0 \leq y_n \leq y_{n+1} \leq 2$.

comme f est strictement croissante sur $[0;2]$, par passage à f on a

$f(0) \leq f(y_n) \leq f(y_{n+1}) \leq f(2)$

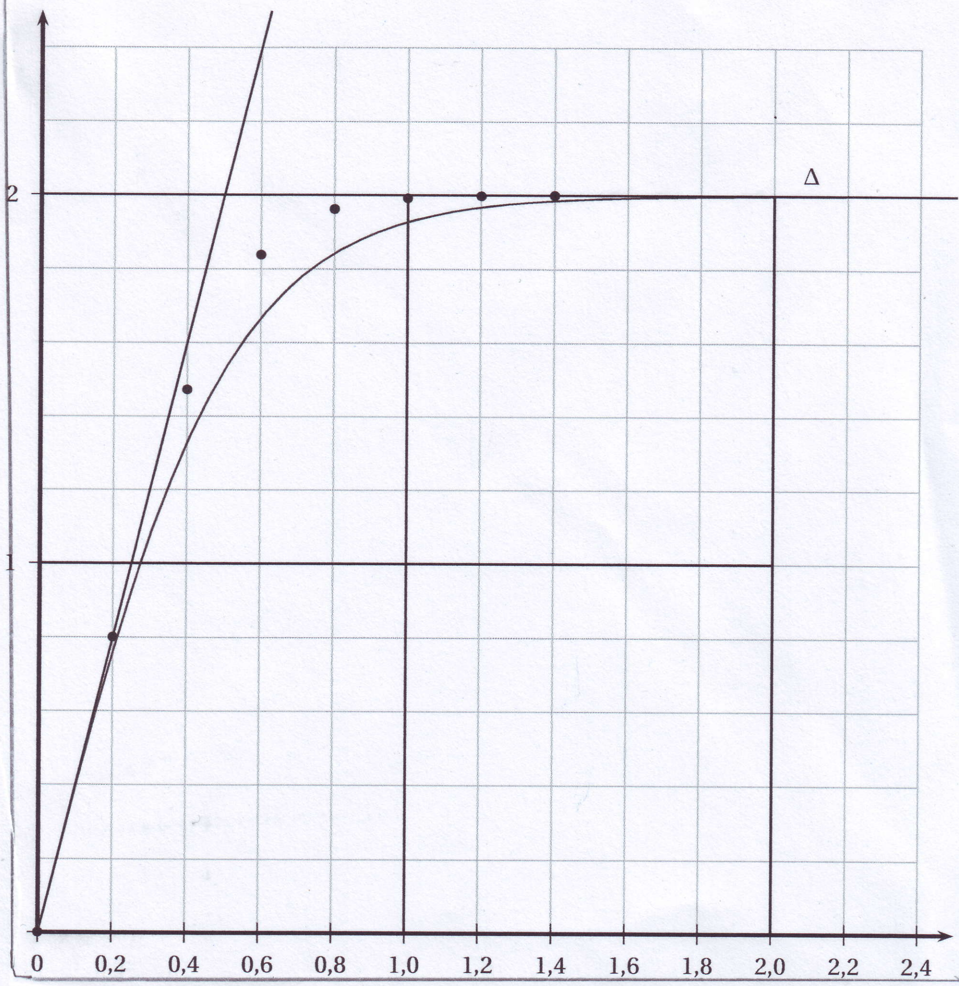
$0 \leq 0,8 \leq y_{n+1} \leq y_{n+2} \leq 2$

donc $P(n+1)$ vraie

- $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

d) (y_n) est croissante et majorée par 2 donc (y_n) converge vers un réel ℓ $0 \leq \ell \leq 2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y_n	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997



(ℓ est solution de l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow -0,2x^2 + 0,8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ donc $\ell = 2$ car $\ell \in [0;2]$)

B] 2] a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty}(e^{4x} - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty}(e^{4x} + 1) = +\infty$, il y a donc une forme indéterminée. Mettons e^{4x} en facteur : $g(x) = 2\left[\dfrac{e^{4x}\left(1 - \frac{1}{e^{4x}}\right)}{e^{4x}\left(1 + \frac{1}{e^{4x}}\right)}\right] = 2\dfrac{\left(1 - \frac{1}{e^{4x}}\right)}{1 + \frac{1}{e^{4x}}}$

et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{4x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\left(\dfrac{1 - \frac{1}{e^{4x}}}{1 + \frac{1}{e^{4x}}}\right) = 2$ c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$: la droite (Δ) d'équation $y = 2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$

b) $g'(x) = 2\left[\dfrac{4e^{4x}(e^{4x}+1) - 4e^{4x}(e^{4x}-1)}{(e^{4x}+1)^2}\right] = \dfrac{8e^{4x}(e^{4x}+1-e^{4x}+1)}{(e^{4x}+1)^2} = \dfrac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2} > 0 \quad \forall x \geq 0$

donc g strictement croissante sur $[0;+\infty[$

3] T_0 a pour équation $y = \underbrace{g(0)}_{0} + \underbrace{g'(0)}_{4}x = 4x$ $\quad T_0$ coupe Δ au point d'abscisse x vérifiant $4x = 2$ soit $x = 0,5$ donc le point d'intersection de Δ avec T_0 a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Exercice 2

A] 1) $e^x = \frac{1}{x} \iff xe^x = 1 \iff x = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \iff x - e^{-x} = 0$

(0 n'est pas solution de l'équation $xe^x = 1$)

2) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

(Il n'y a pas de forme indéterminée)

f étant continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ et 0 appartenant à l'image de $\mathbb{R}$ par f qui est $\mathbb{R}$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0{,}1$ et $f(1) \simeq 0{,}6 \Rightarrow \alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline f & & \nearrow & 0 & \nearrow & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & & \alpha \\ \hline f(x) & & - & 0 \end{array} \quad \text{car } \alpha > 0$$

B] 1) $g(x) = x \iff 1 + x = x(1 + e^x) \iff xe^x = 1 \iff e^x = \frac{1}{x}$ (E)

2) Comme α est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$

3) $g'(x) = \dfrac{(1+e^x) - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x(e^{-x} - x)}{(1+e^x)^2} = -\dfrac{e^x(x - e^{-x})}{(1+e^x)^2} = -\dfrac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

donc $g'(x)$ et $f(x)$ sont de signes contraires et comme $f \leq 0$ sur $[0; \alpha]$ alors $g' \geq 0$ sur $[0; \alpha]$ et g croissante sur $[0; \alpha]$

C] 1) Soit $P(n)$ la proposition « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ »

- $P(0)$ vraie car $u_0 = 0$, $u_1 = g(u_0) = g(0) = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \alpha$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $P(n)$ vraie soit $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$, comme $g \nearrow$ sur $[0, \alpha]$, par passage à g, on en déduit que

$$\underbrace{g(0)}_{} \leq \underbrace{g(u_n)}_{} \leq \underbrace{g(u_{n+1})}_{} \leq \underbrace{g(\alpha)}_{}$$
$$0 < \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

et donc $P(n+1)$ est vraie

- $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) (u_n) est croissante et est majorée par α donc (u_n) converge vers un réel ℓ avec $\ell \in [0; \alpha]$

3) ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$ donc $\ell = \alpha$ d'après B] 2)

4) On trouve $u_4 \simeq 0{,}567143$ à 10^{-6} près par défaut à l'aide de la calculatrice