Correction du contrôle n°2 octobre 2013 Tle S

Exercice 1

1) Posons $X = \frac{x^2}{x+1}$ quand $x \underset{>}{\to} -1$ $x^2 \to 1$ et $x+1 \to 0^+$ donc $X \to +\infty$
par règles opératoires

Donc $\boxed{\lim_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty}$ (La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote "verticale")

(par composée)

De même $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\right)$ car $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$

$= +\infty$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty}$

(par composée)

2) On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{x^2}{x+1}$

x	-1		0		$+\infty$
$u(x)$	||	$+$	0	$+$	

La fonction u est dérivable et strictement positive pour $x \in]-1, +\infty[- \{0\}$

Donc f est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ (par composée) pour $x > -1$ et $x \neq 0$

or $u'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)$ étant du signe de $u'(x)$ on en déduit le tableau de variations de f sur $]-1, +\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$u'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	$?$	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

($u'(x)$ est du signe de x^2+2x)

4) $\lim_{h \underset{>}{\to} 0} \left(\frac{f(h)}{h}\right) = 1$ par règle opératoire et composée

$\lim_{h \underset{<}{\to} 0} \left(\frac{f(h)}{h}\right) = -1$

On a donc $\lim_{h \underset{>}{\to} 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) = 1$ avec $a = 0$ (f est dérivable à droite de 0 et de nombre dérivé à droite 1)

et $\lim_{h \underset{<}{\to} 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) = -1$ avec $a = 0$ (f est dérivable à gauche de 0 et de nombre dérivé à gauche -1)

f n'est donc pas dérivable en 0 (dérivée à gauche $\neq$ dérivée à droite)

cependant $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur -1 et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 1.

C'est ce que suggère la courbe

Exercice 2

1) $\dfrac{x^3+1}{x^2+1} = \dfrac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par règles opératoires

2) $f(x) - x = \dfrac{x^3+1-x(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{-x+1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-1}{x}\left(\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = 0$ par règles opératoires $\Rightarrow (\Delta)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ où Δ est la droite d'équation $y = x$

x	-1		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
positions relatives		$\mathcal{C}_f$ au dessus (Δ)		$\mathcal{C}_f$ en dessous la droite (Δ)	

3) $g'(x) = 3x^2+3 > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} g(x) = \lim(x^3) = \begin{matrix}+\infty \\ (-\infty)\end{matrix}$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus $0 \in \Big]\underbrace{\lim_{-\infty} g}_{-\infty}, \underbrace{\lim_{+\infty} g}_{+\infty}\Big[$,

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, notée α, dans $\mathbb{R}$

Avec la calculatrice, on trouve $\boxed{0{,}5 < \alpha < 0{,}6}$ puis $0{,}59 < \alpha < 0{,}60$

4) f est dérivable sur $[-1, +\infty[$ et, pour tout $x \geq -1$, on a

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x(x^3+3x-2)}{(x^2+1)^2}$

c'est à dire

$f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2+1)^2}$ qui est du signe de $x\,g(x)$ pour $x \geq -1$

5)

x	-1		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\approx 0{,}89$	$\nearrow$	$+\infty$

← à partir du tableau de variations de g et avec α

Exercice 3

1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)
$3n+1$	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8	(10)
$3n+6$	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3	(10)
$15n+1$	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	(10)

Il semblerait que l'implication est vraie quand a est premier avec 10
(C'est le cas avec $3n+1$ et $3n+6$ mais pas avec $15n+1$)

<u>Démonstration</u> Supposons a et 10 premiers entre eux

$an_1 + b \equiv an_2 + b \, (10) \Rightarrow a(n_1 - n_2) \equiv 0 \, (10)$

$\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a(n_1 - n_2) = 10k$

$\Rightarrow 10 \mid a(n_1 - n_2)$

$\Rightarrow 10 \mid (n_1 - n_2)$ car 10 premier avec a (Théorème de Gauss)

$\Rightarrow n_1 - n_2 \equiv 0 \, (10)$

$\Rightarrow n_1 \equiv n_2 \, (10)$

(C'est le principe de base du cryptage affine)

---

2) $2A - 3B = 2(3n+9) - 3(2n+5) = \boxed{3}$

Notons $d = PGCD(A, B)$

$d \mid A$ et $d \mid B \Rightarrow d \mid 2A - 3B = 3 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ \text{ou} \\ d = 3 \end{cases}$ car $d \geq 1$

n	0	1	2	(3)
$B = 2n+5$	2	1	0	(3)

On en déduit que $3 \mid B \Leftrightarrow n \equiv 2 \, (3) \Leftrightarrow n$ est de la forme $3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$

A et B premiers entre eux signifie que $d = 1$

D'après le tableau de congruence précédent 3 ne divise pas B pour $n \equiv 0 \, (3)$ ou $n \equiv 1 \, (3)$ et dans ce cas $d \neq 3$ car d est un diviseur de B et donc $\boxed{d = 1}$ pour ces valeurs de n

Dans le cas où $n \equiv 2 \, (3)$ on a $3 \mid B$ mais $3 \mid A$ car $A = 3\underbrace{(n+3)}_{\in \mathbb{Z}}$

donc 3 un diviseur commun de A et B, donc $3 \mid d$ et donc $\boxed{d = 3}$ car $d = 1$ ou $d = 3$

<u>Au final</u> A et B premiers entre eux $\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \, (3) \\ \text{ou} \\ n \equiv 1 \, (3) \end{cases}$