

Exercice 1 f est définie sur $] -\infty, 1[$

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -3x^2 - 3 = -3(x^2 + 1) < 0 \Rightarrow g$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $g(x) = -x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (-x^3) = \begin{matrix} -\infty \\ (+\infty) \end{matrix}$

on en déduit le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\circ$	$-\infty$
$g'(x)$	$+$	$\circ$	$-$

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$\exists 0 \in g(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, α , dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

Par balayage successif on trouve $\alpha \in]-0,60; -0,52[$

b) 1) $\forall x \in]-\infty, 1[\quad f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^3 - 1) - 3x^2(x^3 + x^2)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$

donc $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^3 - 1)^2}$ qui est du signe de $x g(x)$ pour $x < 1$

2). $f(x) = \frac{x^3(1 + \frac{1}{x})}{x^3(1 - \frac{1}{x^3})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^3}}$ pour $x \neq 0$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	α	0	1
$g(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$-$
$f(x)$	1	$\circ$	0	$-\infty$

en prenant $\alpha \approx -0,6$
on trouve $f(\alpha) \approx -0,12$

c) $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = \frac{(-1)g(-1)}{(-2)^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

donc (Δ) a pour équation $y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = -\frac{1}{2}(x+1) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Exercice 2 f est définie sur $\mathbb{R}$

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ donc g strictement croissante sur $\mathbb{R}$
 et $g(-1) = 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g		$\circ$	
$g(x)$	$-$	0	$+$

signe de g par lecture du tableau de variations

le théorème des valeurs intermédiaires est ici inutile car on sait que $g(-1) = 0$

b) 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x g(x)}{(x^2 + 1)^2}$ qui est du signe de $x g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x^3(1 + \frac{2}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = x \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$

$f(-1) = \frac{1}{2} \quad f(0) = 0$

c) $d(x) = f(x) - (x+2) = \frac{x^3 + 2x^2 - (x+2)(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 - 2x^2 - x - 2}{x^2+1} = \frac{-x-2}{x^2+1}$

1) Il semblerait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0$ (C et Δ étant "asymptotiques" en $+\infty$ et en $-\infty$)
 C au dessus Δ sur $]-\infty, -2]$ et C en dessous Δ sur $[-2, +\infty[$

2) 1^{re} conjecture : $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x(1 + \frac{2}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{x}}{x(1 + \frac{1}{x^2})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$

2^e conjecture $d(x)$ est du signe de $-x-2$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$d(x)$	$+$	0	$-$
	C au dessus Δ		C en dessous Δ

