Correction du contrôle n°1 | Septembre 2013 | Tale S

Exercice 1

2] $\left|\begin{array}{l} u_0 = 0{,}4 \\ \quad\text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{array}\right.$

(a) $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n = -u_n^2$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est à dire (u_n) est décroissante

(b) Soit $P(n)$ la proposition « $0 \leq u_n \leq 1$ »

- $P(0)$ vraie car $u_0 = 0{,}4 \in [0;1]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $P(n)$ vraie : « $u_n \in [0;1]$ » (HR)

démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie : « $u_{n+1} \in [0;1]$ » (C)

Or $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$, par hypothèse (HR) $0 \leq u_n \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -u_n \leq 0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq 1-u_n \leq 1 \\ 0 \leq u_n \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq u_n(1-u_n) \leq 1$ (produit membre à membre)

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$ (C)

- $P(n)$ est vraie au rang initial 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(c) (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0;1]$

ℓ est solution de l'équation : $f(x) = x$

$\Leftrightarrow x(1-x) = x$

$\Leftrightarrow -x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

donc $\ell = 0$

(d) La population de coccinelles va finir par disparaître

3] $u_0 = 0{,}3$

et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1{,}8\,u_n(1-u_n) \qquad f(x) = 1{,}8\,x(1-x) = 1{,}8x - 1{,}8x^2$

(a) $\forall x \in [0;1] \quad f'(x) = 1{,}8 - 3{,}6x = 1{,}8(1-2x)$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0{,}45$	$\searrow$	0

← signe d'une fonction affine

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}8 \times \frac{1}{4} = 0{,}45$

(b) Soit $Q(n)$ la proposition : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ »

- $Q(0)$ vraie car $u_0 = 0{,}3$ et $u_1 = f(u_0) = 0{,}378$ on a bien $0 \leq 0{,}3 \leq 0{,}378 \leq 0{,}5$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $Q(n)$ vraie : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ » (HR)

Démontrons qu'alors $Q(n+1)$ est vraie : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$ » :

C

Par hypothèse (HR) $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ donc, comme f est croissante sur $[0;\frac{1}{2}]$ on a $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\frac{1}{2})$

soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0{,}45$

et donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0{,}5$ C

- La proposition $Q(n)$ est vraie au rang initial 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par $\frac{1}{2}$) d'après (b)

donc (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0;\frac{1}{2}]$

ℓ solution de l'équation : $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow 1{,}8x(1-x) = x$$
$$\Leftrightarrow 0{,}8x - 1{,}8x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x(0{,}8 - 1{,}8x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0;\frac{1}{2}] \\ \text{ou} \\ x = \frac{0{,}8}{1{,}8} = \frac{4}{9} \in [0;\frac{1}{2}] \end{cases}$$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq u_0 = 0{,}3$ car (u_n) est croissante

donc $\ell \geq 0{,}3$ et donc $\ell = \frac{4}{9}$

(d) La population se stabilise à 444 444 individus

4) Il semblerait que (u_n) soit périodique (cyclique)

une année 800 000 individus

l'autre 512 000 individus

etc...

Exercice 2 :

1) Soit A un réel quelconque, il existe un entier N tel que
   $n \geq N \Rightarrow u_n > A$

2) Soit A un réel , déterminons un entier N tel que
   $n \geq N \Rightarrow \sqrt{n} > A$

   Si $A<0$ $N=0$ convient

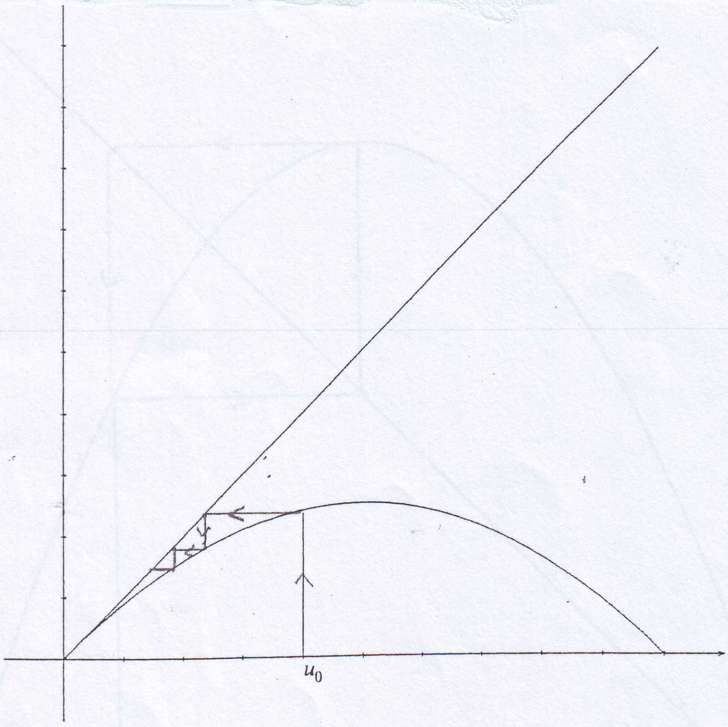
   Si $A \geq 0$ $N=E(A^2)+1$ convient (E(x) est la partie entière de x).

   En effet

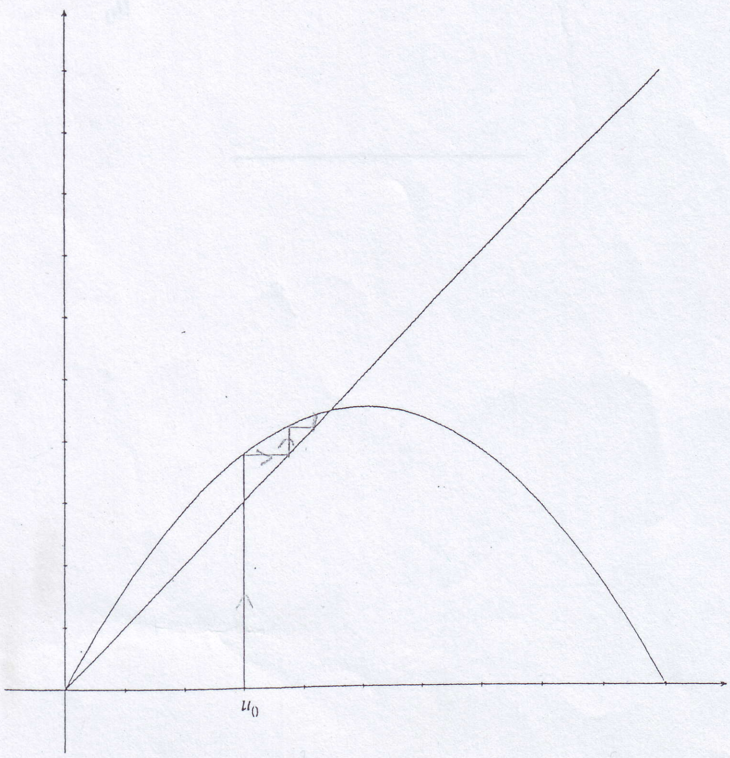
   $n \geq N \Rightarrow n > A^2 \Rightarrow \sqrt{n} > |A| = A$ car $A \geq 0$

Feuilles annexes

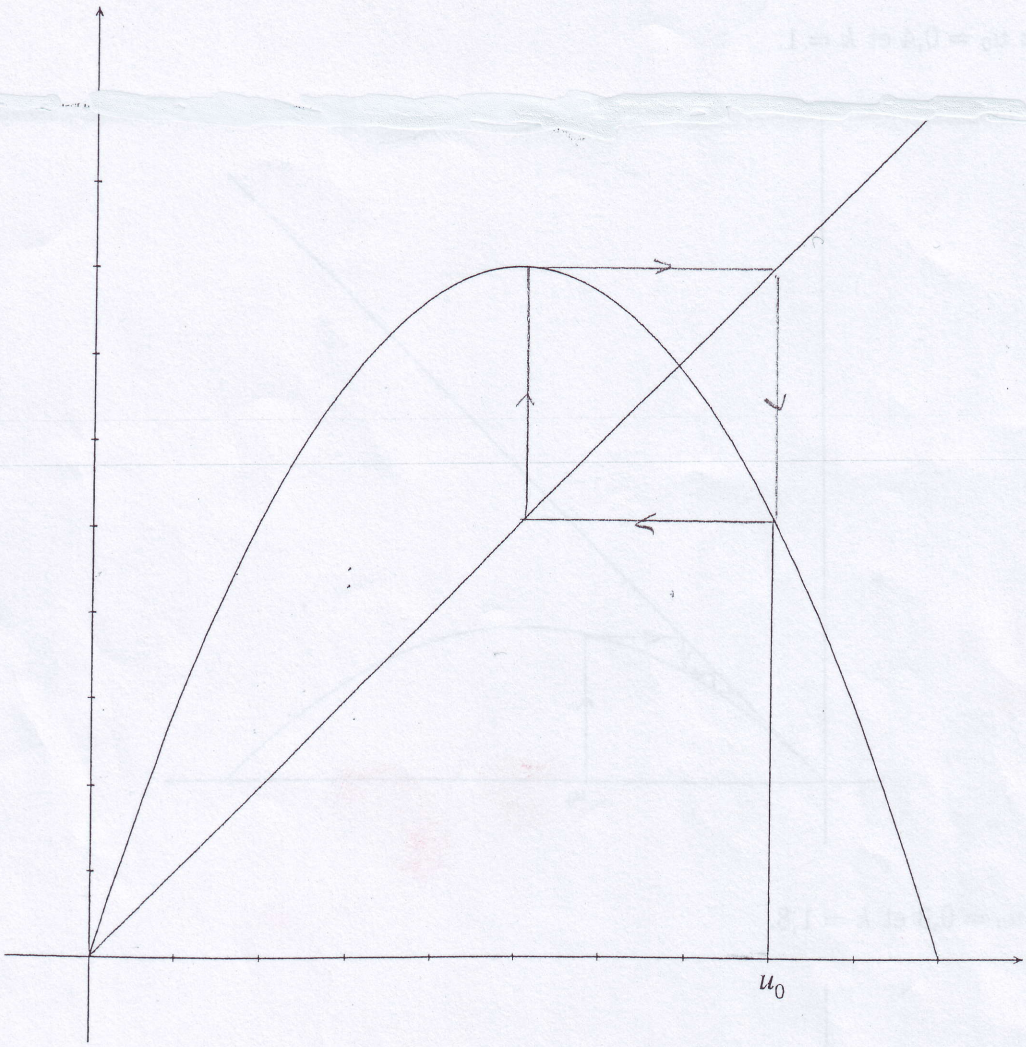
1^{er} cas : $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.



2^{e} cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



3^e cas : $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.



SPÉCIALITÉ | Correction (succincte) | contrôle n°1 | Septembre 2013 | Tle S

2) a)

$a \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$a^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1

tableau 1 $\boxed{\text{modulo } 7}$

b)

$b \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$b^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1

Idem avec b

$\boxed{a^2+b^2} \equiv$

$b \equiv$ \ $a \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	5	1	6	6	1	5
3	2	3	6	4	4	6	3
4	2	3	6	4	4	6	3
5	4	5	1	6	6	1	5
6	1	2	5	3	3	5	2

tableau 2 $\boxed{\text{modulo } 7}$

le tableau 2 montre que $a^2+b^2 \equiv 0\,[7] \iff a \equiv 0\,[7]$ $\boxed{\text{et}}$ $b \equiv 0\,[7]$

(Il n'y a qu'une case où il y a 0 comme congruence)

c) Si $a^2+b^2 = 7c^2$

Alors 7 divise a^2+b^2, et donc d'après a), $\boxed{7 \text{ divise } a}$ $\boxed{\text{et } 7 \text{ divise } b}$.

Il existe 2 entiers k et k' tels que $a = 7k$ et $b = 7k'$

ce qui donne

$$49k^2 + 49k'^2 = 7c^2$$

et donc

$c^2 = 7(k^2+k'^2)$ et comme $k^2+k'^2$ est un entier, on en déduit que 7 divise c^2 et donc $\boxed{7 \text{ divise } c}$ avec le tableau 1 (avec c)

3) $2010 \equiv 1\ [7]$ car $2010 = 7 \times 287 + 1$

donc $2010^{2010} \equiv 1^{2010}\ [7]$

$\boxed{2010^{2010} \equiv 1\ [7]}$ donc <u>1 est le reste cherché</u>

$2011 \equiv 2\ [7]$

donc $\boxed{2011^{2011} \equiv 2^{2011}}\ [7]$

Pour simplifier $2^{2011}\ [7]$ on cherche la plus petite puissance, a, de 2, congrue à 1 modulo 7 puis on écrit la division euclidienne de 2011 par a

Ici on a $\boxed{2^3 = 8 \equiv 1\ [7]}$ $(a = 3)$

ensuite on écrit $2011 = 3 \times 670 + 1$

donc $2^{2011} = 2^{3 \times 670 + 1} = (2^3)^{670} \times 2$

et comme $2^3 \equiv 1\ [7]$

il vient $2^{2011} \equiv \underbrace{1^{670} \times 2}_{2}\ [7]$

Au final $\boxed{2011^{2011} \equiv 2\ [7]}$ et <u>2 est le reste cherché</u>