Exercice 1

1] a) voir figure

b) (u_n) semble converger (vers l'abscisse de I) et décroître

2] a) Soit la proposition $P(n)$: « $u_n - 1 > 0$ »

1) <u>Initialisation</u>
$P(0)$ vraie car $u_0 = 5$ et $u_0 - 1 = 4 > 0$

2) <u>hérédité</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie : $u_n - 1 > 0$, démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} - 1 > 0$

Or $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \dfrac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$

par hypothèse $u_n - 1 > 0$ et on a admis que $u_n + 2 > 0$
donc $u_{n+1} - 1 > 0$

3) La proposition $P(n)$ est vraie au rang initial 0 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • <u>Décroissance</u> de (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

et comme $u_n + 2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc (u_n) décroissante

(*) • <u>Convergence</u> (voir dernière)

3] a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)}$ (voir 2] a) pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \dfrac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$ et de 1er terme

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$$

b) On a donc $v_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = 1 + \dfrac{1}{v_n} = 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $u_n = 1 + \dfrac{12}{3 + 4n} = \dfrac{15 + 4n}{3 + 4n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{15 + 4n}{3 + 4n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4n}{4n}\right) = 1$

(*) • Convergence de (u_n)

Comme, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = \ell$

et $\quad \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}\right) = \dfrac{4\ell - 1}{\ell + 2}$

Donc ℓ vérifie $\ell = \dfrac{4\ell - 1}{\ell + 2} \iff \ell^2 + 2\ell = 4\ell - 1 \iff (\ell - 1)^2 = 1 \iff \ell = 1$

Exercice 2

1] f est dérivable sur $[0;2]$ et pour tout $x \in [0;2]$ $\quad f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2}$
$= \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Comme $f' > 0$ sur $[0;2]$ f est strictement croissante sur $[0;2]$

x	0	1	2
$f(x)$	1 ↗	$\boxed{3/2}$ ↗	$5/3$

donc $\forall x \in [1;2]$ $\quad f(x) \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right] \Rightarrow f(x) \in [1;2]$

2] a) (u_n) semble converger et croître et (v_n) semble converger et décroître

b) $P(n)$: « $1 \leq v_n \leq 2$ »

__initialisation__

$P(0)$: $1 \leq v_0 \leq 2$ ce qui est vrai car $v_0 = 2$

__hérédité__

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie : $1 \leq v_n \leq 2$, démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq v_{n+1} \leq 2$

Comme par hypothèse $v_n \in [1;2]$ d'après Q1] $f(v_n) = v_{n+1} \in [1;2]$

__Conclusion__

La proposition $P(n)$ est vraie au rang initial 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$Q(n)$: « $v_{n+1} \leq v_n$ »

__initialisation__

$Q(0)$: $v_1 \leq v_0$ or $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ donc $Q(0)$ vraie

__hérédité__

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $Q(n)$ vraie "$v_{n+1} \leq v_n$" et démontrons qu'alors $Q(n+1)$ est vraie : $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

Par hypothèse $v_{n+1} \leq v_n$ et on sait d'après la question précédente que v_n et v_{n+1} sont dans $[1;2]$, or sur $[1;2]$ la fonction f est croissante donc par passage à f on en déduit que $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ soit $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

__Conclusion__

La proposition $Q(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2v_n+1}{v_n+1} - \dfrac{2u_n+1}{u_n+1} = \dfrac{(2v_n+1)(u_n+1) - (2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$

$$= \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

On peut démontrer par récurrence que $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n + 1 \geqslant 2$ et $v_n + 1 \geqslant 2$ donc $(u_n+1)(v_n+1) \geqslant 4$

et donc $\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} < \dfrac{1}{4}$

et finalement $\dfrac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$

d) ~~On démontre par récurrence~~ que $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

e) D'après 2 b) (u_n) est croissante et est majorée (par 2) donc elle converge vers une limite ℓ

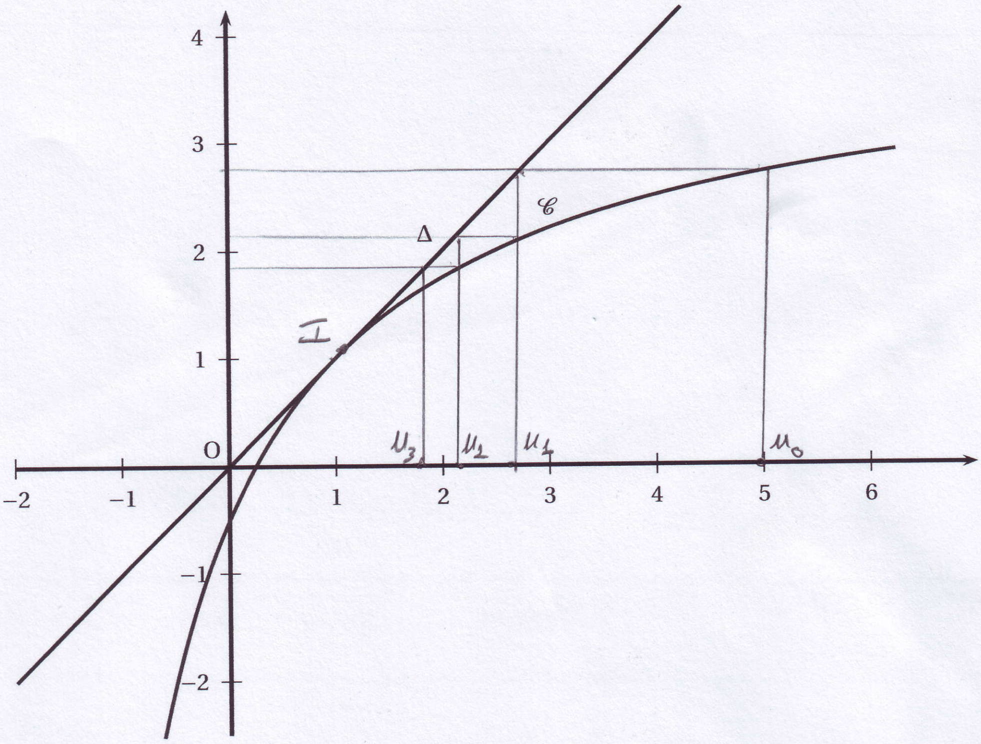
(v_n) est décroissante et est minorée (par 1) donc elle converge vers une limite ℓ'

D'après 2] c) et 2] d) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $(v_n - u_n)$ converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes

Par ailleurs $(v_n - u_n)$ converge vers $\ell' - \ell$ donc $\ell' - \ell = 0$ c'est à dire $\ell = \ell'$

Exercice 1



Exercice 2