

Partie A

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ (règle opératoire)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \text{ (règle spécifique)}$$

2) L'axe des ordonnées est asymptote

$$3) f'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2+x+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

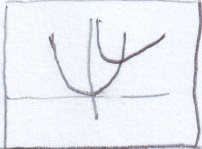
4) $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$ sur $]0, +\infty[$ d'où le tableau de variations suivant

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Partie B

1)  1 seule solution sur $]0, +\infty[$

$$2) f(x) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ et} \\ x^2 + x + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ et} \\ x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$3) g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \text{ qui a 2 racines } 1 \text{ et } -1/3 \text{ } (\Delta = 16)$$

x	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	$-0,81$	-2	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$g(1) = -2 \text{ et } g(-1/3) = -0,81$$

Sur $]-\infty, 1]$ la valeur maximale de g est $-0,81$ donc g ne s'annule pas sur cet intervalle

Sur $[1, +\infty[$, comme g est continue et strictement croissante et 0 est compris entre $g(1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans cet intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et $\alpha > 1$

Partie C

2] Soit $P(n): \ll u_n > n \gg$

initialisation $P(0)$ vraie car

$$u_0 = 1 \text{ donc } u_0 > 0$$

hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie (HR)

démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie (C)

$$u_{n+1} > n+1$$

$$\text{or } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} + 1$$

mais $u_n > n$ (HR) donc $u_n > 0$

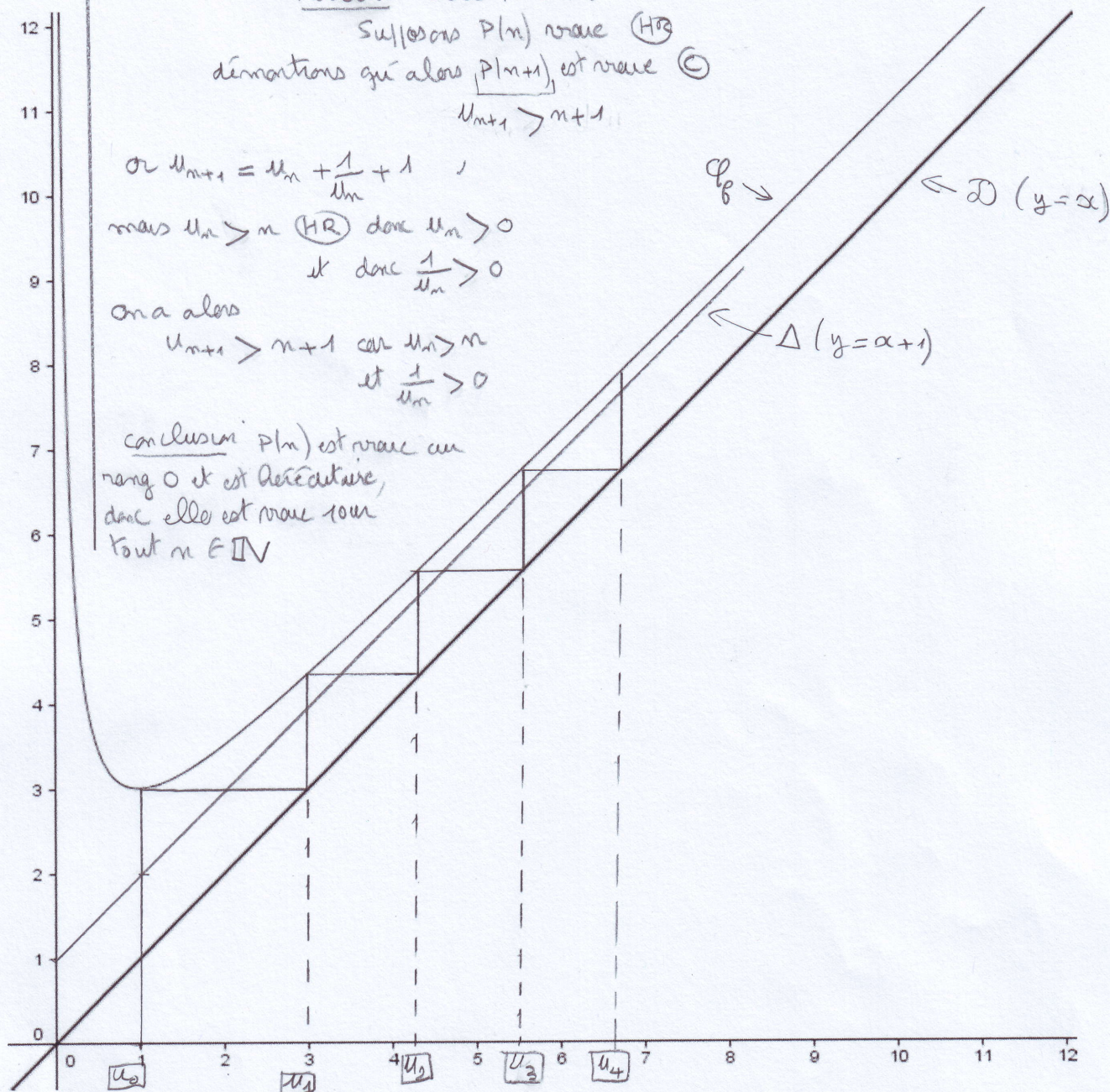
$$\text{et donc } \frac{1}{u_n} > 0$$

On a alors

$$u_{n+1} > n+1 \text{ car } u_n > n$$

$$\text{et } \frac{1}{u_n} > 0$$

conclusion $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$



3]. On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} + 1 \geq 0$

(u_n) est donc croissante

• $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$

(On pourrait aussi démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n+1$)

4] Soit par le calcul, soit par un graphique, il semblerait que dans ce cas (u_n) est croissante et converge vers -1

l doit vérifier la relation de récurrence : $l = l + \frac{1}{l} + 1$

d'où $\frac{1}{l} = -1$ et $l = -1$