Nouvelle - Calédonie Décembre 2007 Tale S SPEC

1] 1) $6^{10} \equiv 1\ [11]$ petit théorème de Fermat : 11 est premier et 6 est premier avec 11

donc $\boxed{1}$ est le reste cherché

2) Idem $6^4 \equiv 1\ [5]$

3) $6^{10} \equiv 1\ [11] \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1^4\ [11] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1\ [11]$

$6^4 \equiv 1\ [5] \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1^{10}\ [5] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1\ [5]$

4) 11 divise $6^{40}-1$ et 5 divise $6^{40}-1$ et comme 5 et 11 sont premiers entre eux $\underbrace{11 \times 5}_{55}$ divise $6^{40}-1$ c'est à dire $6^{40} \equiv 1\ [55]$

2] 1) $5 \mid 65$ et $5 \mid 40$ donc, si (E) a un couple d'entiers (x,y) solution, alors $5 \mid 65x - 4y = 1$ absurde

2) $40 = 17 \times 2 + 6$
$17 = 6 \times 2 + 5$
$6 = 5 \times 1 + \boxed{1}$

17 et 40 sont premiers entre eux ainsi que 17 et -40, donc d'après le théorème de Bezout (E') a au moins une solution

3) $1 = 6 - 5$
$= 6 - (17 - 2 \times 6) = -17 + 3 \times 6$
$= -17 + 3(40 - 2 \times 17)$
$= -7 \times 17 + 3 \times 40$

Ainsi $17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$ et $\underbrace{(-7\,;\,-3)}_{x_0\,;\,y_0}$ est solution de (E')

4) • (x,y) sol de E' $\Rightarrow \underbrace{17(x - x_0) = 40(y - y_0)}_{(F)} \underset{\text{"Gauss"}}{\Rightarrow} 40 \mid (x - x_0)$ car 40 est premier avec 17

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 40k$

et en substituant dans (F) on obtient $y = y_0 + 17k$

• Réciproquement soit $k \in \mathbb{Z}$ le couple $(x_0 + 40k, y_0 + 17k)$ est solution de (E')

en effet $17(x_0 + 40k) - 40(y_0 + 17k) = 17x_0 - 40y_0 = 1$

• Conclusion : L'ensemble des couples solutions de (E') est l'ensemble des couples de la forme $(x_0 + 40k, y_0 + 17k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

$(-7 + 40k, -3 + 17k)$

• $17x_0 \equiv 1\ [40] \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $17x_0 - 40y = 1$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 = -7 + 40k$ et $y = -3 + 17k$

De plus $0 \leq x_0 \leq 40 \Rightarrow 0 \leq -7 + 40k \leq 40 \Rightarrow \frac{7}{40} \leq k \leq \frac{47}{40} \Rightarrow \boxed{k = 1} \Rightarrow \boxed{x_0 = 33}$

3) $a^{17} \equiv b\ [55] \Rightarrow a^{17\times 33} \equiv b^{33}\ [55]$

or $17\times 33 \equiv 1\ [40]$ d'après 2) 4)

c'est à dire $17\times 33 = 1 + 40k$ où $k \in \mathbb{N}$ $(k = 14)$

donc $a^{17\times 33} = a \times (a^{40})^{14}$ or $a^{40} \equiv 1\ [55]$ donc $(a^{40})^{14} \equiv 1\ [55]$

et donc $a^{17\times 33} \equiv a\ [55]$

et comme $a^{17\times 33} \equiv b^{33}\ [55]$

on en déduit que $b^{33} \equiv a\ [55]$