Exercice 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cos x \in [-1;1]$ donc $\cos x + 2 \geq 1$ et $\cos x + 2 > 0$

et comme $e^{1-x} > 0$ alors $f(x) > 0$

2) a) $\cos(x - \pi/4) = \cos x \underbrace{\cos \pi/4}_{=\sqrt{2}/2} + \sin x \underbrace{\sin \pi/4}_{=\sqrt{2}/2} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos x + \sin x)$

et donc $\sqrt{2}\cos(x - \pi/4) = \cos x + \sin x$ et cela pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$
$$-1 \leq \cos(x - \pi/4) \leq 1$$
$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos(x - \pi/4) \leq \sqrt{2}$$
$$\underbrace{2-\sqrt{2}}_{>0} \leq \underbrace{2 + \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)}_{2 + \cos x + \sin x} \leq 2 + \sqrt{2}$$
$\Rightarrow 2 + \cos x + \sin x > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = (-\sin x)e^{1-x} - e^{1-x}(2 + \cos x)$
$$= -\underbrace{e^{1-x}}_{>0}\underbrace{(2 + \cos x + \sin x)}_{>0 \text{ d'après b)}}$$
$\Rightarrow f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ strictement décroissante

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

$\Rightarrow e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ car $e^{1-x} > 0$

b) quand $x \to +\infty$ $1 - x \to -\infty$ et par composée $e^{1-x} \to 0$

et d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\left(\begin{array}{ccc} e^{1-x} \leq & f(x) \leq & 3e^{1-x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \quad \text{qd } x \to +\infty \end{array} \right)$

quand $x \to -\infty$ $1 - x \to +\infty$ et par composée $e^{1-x} \to +\infty$

et par comparaison : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\left(\begin{array}{cc} e^{1-x} & \leq f(x) \\ \downarrow & \\ +\infty & \text{qd } x \to -\infty \end{array} \right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ l'axe des abscisses est asymptote à C_f en $+\infty$

4) a)

x	0	α	π
f	$3e > 3$ ↘	3 ↘	$e^{1-\pi} < 3$

f est strictement décroissante et continue sur $[0;\pi]$ de plus 3 est entre $e^{1-\pi}$ et $3e$ donc l'équation $f(x) = 3$ n'a qu'une seule solution dans $[0;\pi]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

b) Avec la calculatrice $\alpha \in [0{,}8 ; 0{,}9]$

puis $\boxed{\alpha \in [0{,}87 ; 0{,}88]}$

Exercice 2

1) $z_C = 2e^{i\pi/2}e^{i\pi/12} = \boxed{2e^{i7\pi/12}}$ donc $\mathrm{Arg}(z_C) = \frac{7\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

réponse <u>FAUSSE</u>

2) $\frac{z_A}{z_B} = \frac{1+i\sqrt3}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt3)(1-i)}{2} = \boxed{\left(\frac{1+\sqrt3}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)}$

réponse <u>VRAIE</u>

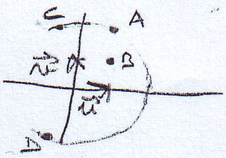
3) $z_A = 2e^{i\pi/3}$

$z_B = \sqrt2\, e^{i\pi/4}$ $\Rightarrow$ $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2}{\sqrt2}e^{i(\pi/3-\pi/4)} = \boxed{\sqrt2\, e^{i\pi/12}}$

réponse <u>VRAIE</u>

4) $z_B^{20} = (\sqrt2)^{20}e^{5i\pi} = -(\sqrt2)^{20}$

réponse <u>VRAIE</u>

5) 

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = \boxed{(1-\sqrt3)i} = \lambda_1 i$ $\lambda_1\in\mathbb{R}$

$z_{\vec{CD}} = \boxed{-2\,\mathrm{Im}(z_C)\,i} = \lambda_2 i$ $\lambda_2\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires à $\vec{v}$ d'affixe i et de même sens car λ_1 et λ_2 sont négatifs

réponse $\boxed{\text{VRAIE}}$

6) $\frac{OA}{OB} = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \left|\sqrt2\, e^{i\pi/12}\right| = \boxed{\sqrt2}$

$OC = |z_C| = \boxed{2}$ car $z_C = 2e^{7i\pi/12}$ on a $\frac{OA}{OB} = \sqrt2$ et $\frac{OC}{\sqrt2} = \sqrt2$

réponse $\boxed{\text{VRAIE}}$

7) $z^2 - 8z + 64 = 0$ (E) équation du 2^d degré à coefficient réels, donc on peut utiliser la méthode du $\Delta = 64 - 4\times 64 = -3\times 64$

donc (E) a 2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{8 + i\,8\sqrt3}{2} = \boxed{4+4i\sqrt3}$

$z_2 = \boxed{4-4i\sqrt3}$

réponse $\boxed{\text{FAUSSE}}$