

Exercice de spécialité

Partie A

- 1) L'énoncé se traduit par $a_{m+1} = 0,2a_m + 0,1b_m$
et $b_{m+1} = 0,6a_m + 0,3b_m$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}}$

2) $U_1 = M U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+6=16 \\ 30+18=48 \end{pmatrix}$

$U_2 = M U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2+4,8=8 \\ 9,6+14,4=24 \end{pmatrix}$

3) On vérifie que $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ $U_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sont au bout de 5h, il ne restera plus aucun vélo dans la station.

Partie B

$$V_{m+1} = M V_m + R \quad \text{où } M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1) a) $V = M V + R \Leftrightarrow V - M V = R \Leftrightarrow I V - M V = R \Leftrightarrow (I - M)V = R$
 $\Leftrightarrow NV = R$

b) $V = N^{-1}R = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ -1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 42+2=44 \\ 36+16=52 \end{pmatrix}}$

2) a) $V_m \in IV$ $V_{m+1} = M V_m + R$
 $V = M V + R \Rightarrow V_{m+1} - V = M V_m - M V = M(V_m - V)$
 $\Rightarrow W_{m+1} = M W_m$

b) $W_m = M^m W_0$ et $M^m = \frac{1}{2^{m-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$ (admis)

$\forall n \in IV: W_n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
 $= \boxed{\frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}} \Rightarrow V_n = W_n + V = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{2^{n-1}} + 44 \\ \frac{6}{2^{n-1}} + 52 \end{pmatrix}}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2^{n-1}} + 44 \right) = \boxed{44}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{2^{n-1}} + 52 \right) = \boxed{52}$

donc le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B se stabilise respectivement vers 44 et 52