Exercice 1

A] 1) a) $\forall x \in [0;2]$ $f'(x) = 1 \times e^{-4x} + (-4)e^{-4x}(x+\frac{1}{4})$
$= e^{-4x}(1 - 4x - 1)$
$= \boxed{-4x e^{-4x}}$

b) $\forall x \in [0;2]$ $e^{-4x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-4x$

x	0		2
$-4x$	0	$-$	

$\Rightarrow$ f strictement décroissante sur $[0;2]$

2)

x	0	$\searrow$	2
f			

$f(0)$ est la valeur maximale prise par f
donc on cherche b tel que $f(0) = 1,5$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + b = 1,5$
$\Leftrightarrow \boxed{b = 1,25 = \frac{5}{4}}$

B] 1) $\forall x \in [0;2]$ $F'(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x} + (-4)e^{-4x}(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}) + \frac{5}{4}$
$= e^{-4x}(-\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}) + \frac{5}{4}$
$= (x + \frac{1}{4})e^{-4x} + \frac{5}{4}$
$= \boxed{f(x)}$ donc F est une primitive de f sur $[0;2]$

2) L'aire en m^2 ($1m^2 = 1u.a.$) d'un vantail est l'aire du domaine situé entre C_f, la droite d'équation $y = 0,05$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, soit $A = \int_0^2 (f(x) - 0,05)\,dx$
$= \left[F(x) - 0,05x\right]_0^2$
$= F(2) - F(0) - 0,1$
$= \frac{1}{8} + \frac{5}{2} - \frac{5}{8}e^{-8} - \frac{1}{10}$
$= \boxed{\frac{101}{40} - \frac{5}{8}e^{-8}} \simeq (2,52m^2)$

$F(2) = -\frac{5}{8}e^{-8} + \frac{5}{2}$
$F(0) = -\frac{1}{8}$

C] 1) L'aire de la planche 0 est $(f(0) - 0,05) \times 0,12$
1 est $(f(1 \times 0,17) - 0,05) \times 0,12$
⋮
k est $\boxed{(f(0,17k) - 0,05) \times 0,12}$

2) Tant que $X + 0,17 < \boxed{2,05}$ $(X + 0,12 < 2)$
S prend la valeur $S + \boxed{(f(X) - 0,05) \times 0,12}$

Remarque Avec Python on trouve 12 planches, comme sur la figure.
et $S \simeq 1,83 m^2$
Si on écrit $X + 0,17 < 2$ on trouve 11 planches seulement
et $S \simeq 1,69$

Exercice 2

1] a) I_n est l'aire du domaine situé sous $\mathcal{C}_{f_n}$ et sur $[0;1]$ en u.a
Le graphique suggère que (I_n) est décroissante

b) Comparons $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour $x \in [0;1]$:

$\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $(n+1)x \geqslant nx$

$\Rightarrow e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$

$\Rightarrow f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ $\quad \downarrow \times \frac{1}{1+x} > 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx$ par passage à l'intégrale sur $[0;1]$

ou encore $\boxed{I_{n+1} \leqslant I_n}$

$\Rightarrow (I_n)$ décroissante

2] a) $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 1+x \geqslant 1$

$\Rightarrow (1+x)^2 \geqslant 1+x \geqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$ $\quad \downarrow \times e^{-nx} > 0$

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$

b) et par passage à l'intégrale sur $[0;1]$ on a

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant \underbrace{\int_0^1 e^{-nx}\,dx}_{\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1}$

$$\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-n}}$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{e^{-n}}{n}\right) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-n}\right) = 0$

et d'après le théorème des gendarmes on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$$