Correction EXERCICE

1\. a. $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 1+2\sqrt{6}+6 = 7+2\sqrt{6}$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 73+28\sqrt{6}$,

$\left(1+\sqrt{6}\right)^6 = \left(73+28\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right) = 847+342\sqrt{6}$ ..

b. $847 = 342\times 2+163$; $342 = 163\times 2+16$; $163 = 16\times 10+3$; $16 = 3\times 5+1$ donc 847 et 342 sont premiers entre eux.

2\. $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

$a_1 = 1, b_1 = 1$; $a_2 = 7, b_2 = 2$; $a_4 = 73, b_4 = 28$, etc.

a. $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} = \left(a_n + b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right) = a_n + 6b_n + \left(a_n + b_n\right)\sqrt{6}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

b. $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2\left(a_n + b_n\right) + 5b_n$;

Raisonnons par l'absurde : si $a_{n+1} + b_{n+1}$ est divisible par 5, comme $5b_n$ est divisible par 5, alors 5 divise $2(a_n + b_n)$, et comme 5 est premier avec 2 , d'après le théorème de Gauss , 5 divise $a_n + b_n$ ce qui est contradictoire.

Par ailleurs 5 ne divise pas $a_1 + b_1 = 2$ donc par récurrence 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

En effet la proposition P_n « 5 ne divise pas $a_n + b_n$ » est vraie au rang initial 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel non nul n .

c. $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n \\ 6b_{n+1} - a_{n+1} = 5a_n \end{cases}$.

Soit d un diviseur positif de a_{n+1} et de b_{n+1} ; d divise donc $5a_n$ et $5b_n$

et d divise PGCD($5a_n$,$5b_n$) = 5PGCD(a_n ,b_n) = 5 car a_n et b_n sont premiers entre eux .

Donc d= 5 ou 1 ; mais d ne peut pas être 5 car sinon 5 diviserait a_{n+1} et b_{n+1} et donc diviserait $a_{n+1} + b_{n+1}$ ce qui est impossible d'après la question précédente.

Donc d=1 c'est-à-dire a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

Par ailleurs a_2 et b_2 sont premiers entre eux donc par récurrence a_n et b_n sont premiers entre eux. (même principe qu'au **2b.**)