Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$

b) $\forall x > 0 \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ donc f strictement croissante sur $]0, +\infty[$

2) a)

x	0		α_n		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	n	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in]-\infty, +\infty[$ image de $]0, +\infty[$ par f et comme f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = n$ a une et une seule solution, notée α_n, dans $]0, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

c) $\alpha_1 = 1$ car $\ln 1 + 1 = 1$

d) $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$

donc $\boxed{f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n)}$ et comme f est strictement croissante

alors $\boxed{\alpha_{n+1} > \alpha_n}$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$

et donc (α_n) est une suite strictement croissante

3) a) (Δ) a pour équation $y = \underbrace{f(1)}_{1} + \underbrace{f'(1)}_{2}(x-1) = 2x - 1$

b) $\forall x > 0 \quad h'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$= \frac{1 - x}{x}$

qui est du signe de $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$h(x)$		$-$	0	$-$	

$f(x) - (2x - 1) = \ln x - x + 1 = h(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$

donc (Γ) est en dessous (Δ)

c) On a démontré que pour tout $x > 0$ $f(x) \leq 2x - 1$

et en prenant $x = \alpha_n$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{f(\alpha_n)}_{n} \leq 2\alpha_n - 1$$

$$\Rightarrow \alpha_n \geq \frac{n+1}{2}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \geq \frac{n+1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{2}\right) = +\infty$

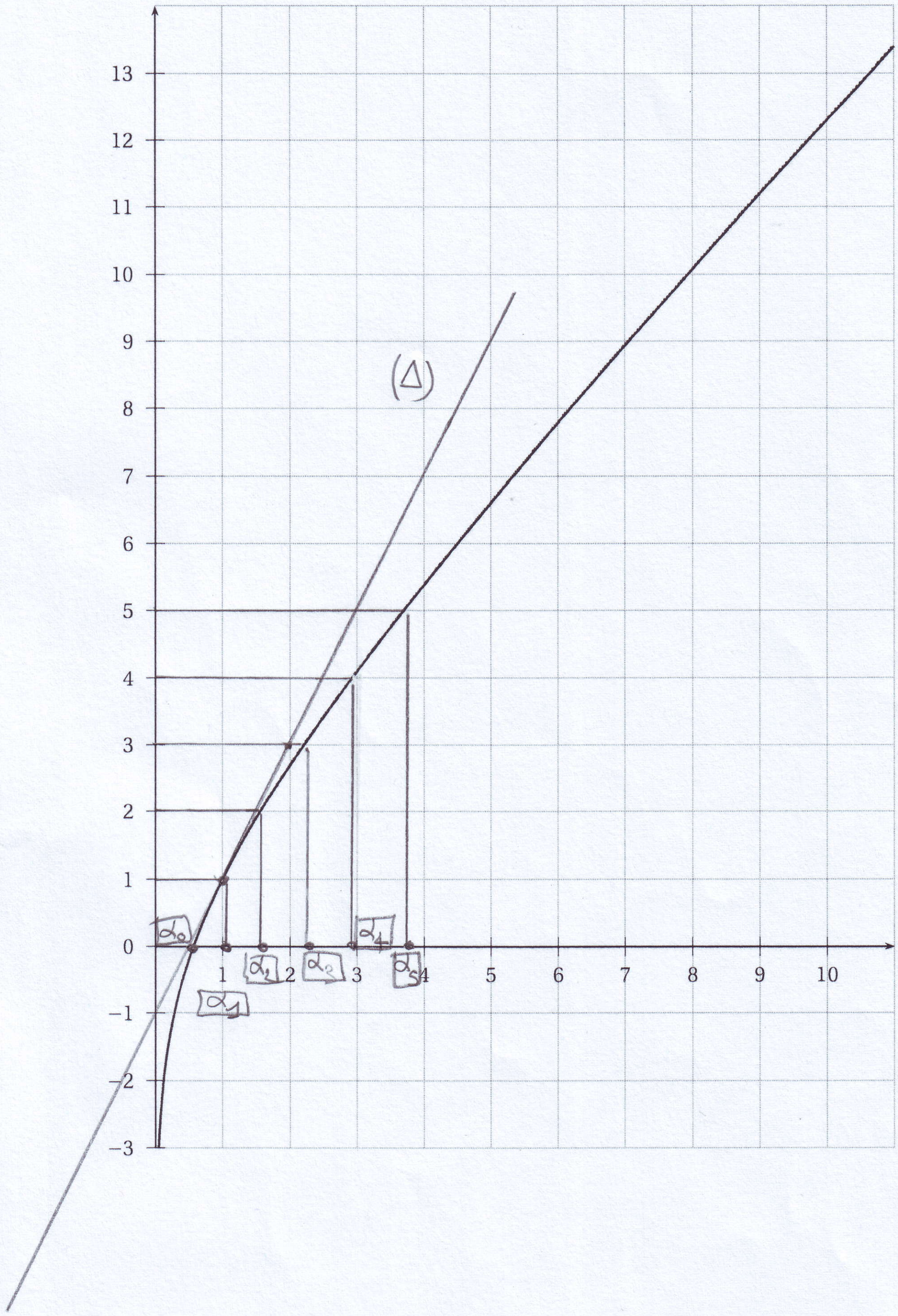
donc par comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$$

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 1



Exercice 2

1) $e^{2x} - e^{x} + 1 = \underbrace{X^2 - X + 1}_{\Delta < 0}$ en posant $X = e^{x}$

donc $\forall X \in \mathbb{R}$ $X^2 - X + 1 > 0$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$

(La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$)

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1}}$ qui est du signe de $2e^{2x} - e^{x}$ sur $\mathbb{R}$

car, $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$

or $2e^{2x} - e^{x} = e^{x}(2e^{x} - 1)$ qui est du signe de $2e^{x} - 1$ car $e^{x} > 0$

$2e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$ $\left(= \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ $\approx -0{,}7$

$2e^{x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant -\ln 2$ $\left(= \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

- $f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \boxed{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx -0{,}3$
- $e^{2x} - e^{x} + 1 = e^{x}\left(e^{x} - 1\right) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x} - 1) = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^{x} + 1) = +\infty$ et par composée

$\boxed{\lim\limits_{x \to} f(x) = +\infty}$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} - e^{x} + 1) = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

donc par composée $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$ (car $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$)

3) $e^{2x} - e^{x} + 1 = e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

donc $f(x) = \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

et donc $f(x) - 2x = \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) = 1$

et par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \ln 1 = 0$