TeS — Correction du contrôle 3 de Novembre 2014 – Spécialité maths
(Polynésie juin 2014)

A]

1] $\boxed{j = 1 \quad m = 8}$ $\Rightarrow z = 1 \times 12 + 8 \times 37 = 308$

2] $z = 12j + 37m \Rightarrow z - m = 12j + 36m \equiv 0\,(12)$ car $12 \equiv 0\,(12)$ et $36 \equiv 0\,(12)$

$\Rightarrow \boxed{z \equiv m\,(12)}$

$z = 474$ donc $474 \equiv m\,(12)$ et $1 \leq m \leq 12$ or $474 \equiv 6\,(12)$ donc $\boxed{m = 6}$

et $j = \dfrac{z - 37m}{12} = \dfrac{474 - 37 \times 6}{12} = \boxed{21}$ donc la date est le $\boxed{\text{21 juin}}$

B]

1] à la place de "afficher z" on met

"$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } z = 503 \\ \text{alors afficher } j \\ \qquad \text{afficher } m \end{array}}$"

2] a) $z - 7m = 12j + 24m \equiv 0\,(12)$ car $12 \equiv 0\,(12)$ et $24 \equiv 0\,(12)$

donc $\boxed{z \equiv 7m\,(12)}$

b)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$7m$	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0	(12)

c) $503 \equiv 11\,(12)$ donc $7m \equiv 11\,(12)$ et donc $\boxed{m = 5}$ d'après b)

$j = \dfrac{503 - 31 \times 5}{12} = \boxed{29}$ donc la date est le $\boxed{\text{29 mai}}$

3] a) $12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503$

---

b) (x, y) solution de $\begin{array}{l} 12x + 31y = 503 \\ 12(-2) + 31 \times 17 = 503 \end{array}$ $\underset{\text{par soustraction}}{\Longrightarrow}$ $12(x+2) + 31(y - 17) = 0$

$\Rightarrow \boxed{12(x+2) = 31(17 - y)}$ (E')

---

c) $12 \mid 31(17 - y)$ et 12 premier avec 31 donc $12 \mid (17 - y)$ d'après le théorème de Gauss

d'après b) avec (E')

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $17 - y = 12k$ et avec (E') on a

$$x + 2 = 31k$$

donc $(x, y) = (-2 + 31k, 17 - 12k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement si $(x, y) = (-2 + 31k, 17 - 12k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors

$12x + 31y = 12 \times (-2) + 12 \times 31k + 31 \times 17 - 31 \times 12k = 12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503$

L'ensemble des couples d'entiers solution est donc $\boxed{\{(-2 + 31k, 17 - 12k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$

---

d) $1 \leq y \leq 12 \Leftrightarrow 1 \leq 17 - 12k \leq 12 \Leftrightarrow 5 \leq 12k \leq 16 \Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{16}{12} \Rightarrow \boxed{k = 1}$

donc $\boxed{y = 17 - 12 \times 1 = 5}$ et $\boxed{x = -2 + 31 \times 1 = 29}$ on retrouve bien le $\boxed{\text{29 Mai}}$

 (m) $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (j)