Correction succincte du contrôle n°3 de novembre 2014 — Tle S

(Juin asie 2013)

[B] 1] $f'(x) = e^{x}$ et $g'(x) = e^{-x}$ donc

le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ en A est $\boxed{f'(a) = e^{a}}$

et le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ en B est $\boxed{g'(b) = e^{-b}}$

On a donc $e^{a} = e^{-b}$ d'où $a = -b$ ou encore $\boxed{b = -a}$

2] $\mathcal{D}$ a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a) = e^{a}(x-a) + e^{a} = \boxed{e^{a}}x + \boxed{e^{a} - ae^{a}}$

et a pour équation $y = g(b) + g'(b)(x - b) = 1 - e^{-b} + e^{-b}(x - b)$

$= 1 - e^{a} + e^{a}(x + a)$ car $b = -a$

$= \boxed{e^{a}}x + \boxed{ae^{a} + 1 - e^{a}}$

On donc $e^{a} - ae^{a} = ae^{a} + 1 - e^{a}$

soit $2ae^{a} - 2e^{a} + 1 = 0$

ou encore $2(a-1)e^{a} + 1 = 0$ donc a est bien solution de l'équation $\boxed{2(x-1)e^{x} + 1 = 0}$

[C] 1] a) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty}$ car $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}(x-1) = +\infty$

$\varphi(x) = 2xe^{x} - 2e^{x} + 1$, or $\lim_{x \to -\infty}(xe^{x}) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$, donc

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1}$

---

b) $\varphi'(x) = 2\left[e^{x} + e^{x}(x-1)\right] = \boxed{2xe^{x}}$ qui est du signe de x car

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{x} > 0$

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi(0) = -1$

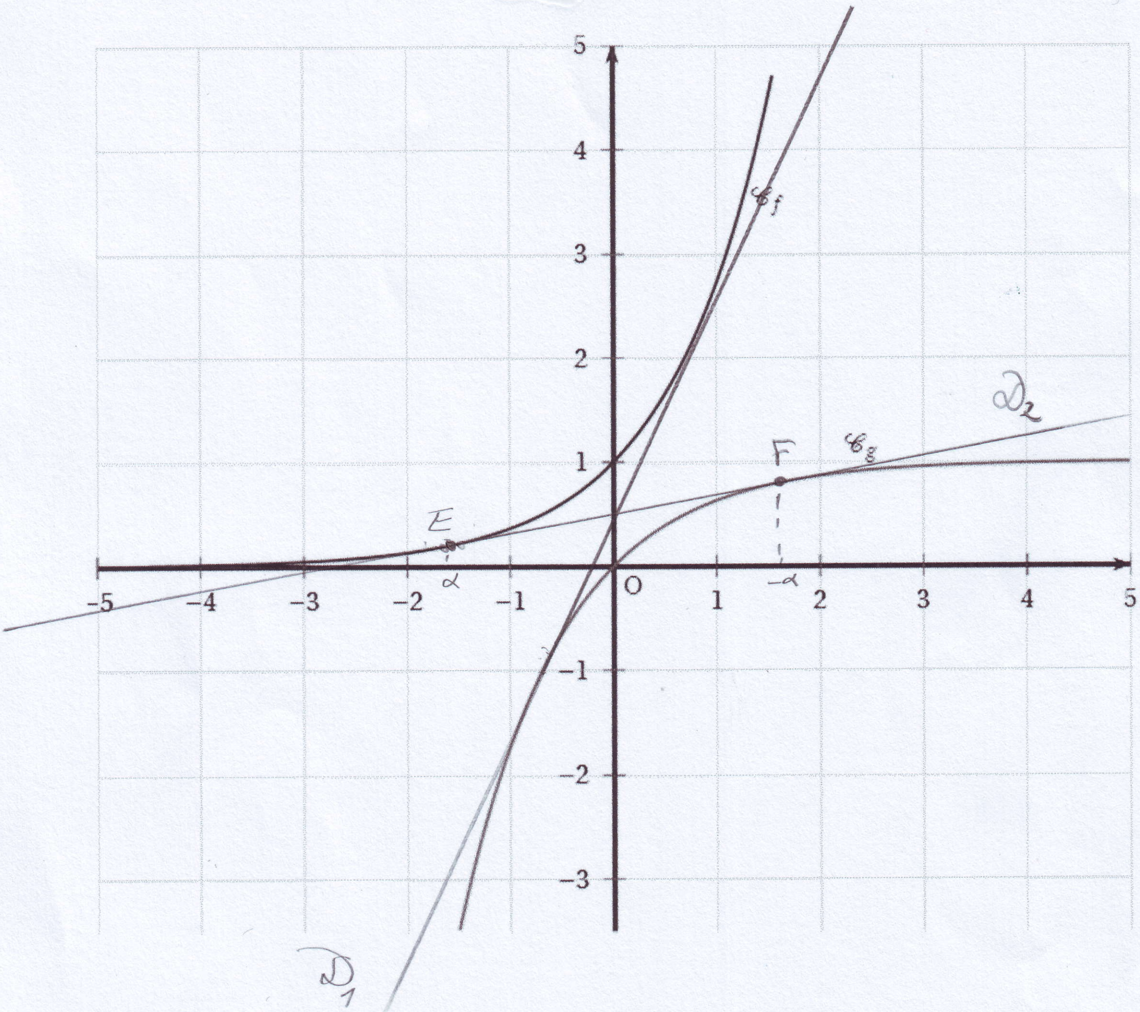
2] a) Sur $]-\infty, 0]$, φ est strictement décroissante et continue, de plus $0 \in [\underbrace{\varphi(0)}_{-1} ; \underbrace{\lim_{x \to -\infty}\varphi(x)}_{1}[$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, α, dans $]-\infty, 0]$

De même sur $[0, +\infty[$, φ est strictement croissante et continue, de plus $0 \in [\underbrace{\varphi(0)}_{-1}, \underbrace{\lim_{x \to +\infty}\varphi(x)}_{+\infty}[$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, β, dans $[0, +\infty[$

b) On trouve $\boxed{\alpha \approx -1,68}$ et $\boxed{\beta \approx 0,77}$ arrondies au centième près.

Annexe

à rendre avec la copie



$\boxed{D}$ Soit E le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α
et soit F le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$

1] Démontrer que (EF) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en E équivaut à démontrer que le coefficient directeur de (EF) est égal à $f'(\alpha)$:

$$\boxed{\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = e^{\alpha}} \iff \frac{g(-\alpha) - f(\alpha)}{-\alpha - \alpha} = e^{\alpha}$$

$$\iff \frac{1 - e^{\alpha} - e^{\alpha}}{-2\alpha} = e^{\alpha}$$

$$\iff 1 - 2e^{\alpha} = -2\alpha e^{\alpha}$$

$$\iff 2\alpha e^{\alpha} - 2e^{\alpha} + 1 = 0$$

$\iff \varphi(\alpha) = 0$ ce que vérifie α

2] La tangente à $\mathscr{C}_g$ en F a pour coefficient directeur $\boxed{g'(-\alpha) = e^{\alpha}}$ qui est celui de (EF) (d'après 1]) donc (EF) est la tangente à $\mathscr{C}_g$ en F