S)

Exercice 1 (Ex 3 · Pondichéry Avril 2015)

A 1) a) $P(64 \leq X \leq 104) = 2P(64 \leq X \leq 80) = 2(P(X \leq 80) - P(X \leq 64))$
$= 2(0,5 - 0,16)$
$= \boxed{0,68}$

b) $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx 0,68 \Rightarrow \boxed{\sigma \approx 20}$

2) a) Z suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$

b) $X \leq 64 \Leftrightarrow \frac{X-84}{\sigma} \leq \frac{64-84}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leq -\frac{20}{\sigma}$
$\Rightarrow P(X \leq 64) = P(Z \leq -\frac{20}{\sigma})$

c) Avec la calculatrice, comme $P(Z \leq -\frac{20}{\sigma}) = 0,16$,
on trouve $-\frac{20}{\sigma} \approx -0,99445$ soit $\boxed{\sigma \approx 20,112}$

3) On prend $\sigma = 20,1$

a) $P(24 \leq X \leq 60) \approx \boxed{0,115}$

b) $P(X > 120) \approx \boxed{0,037}$

B 1) L'expérience aléatoire est assimilée à un schéma de Bernoulli, la loi du nombre de clients faisant jouer l'extension de garantie (N) est $\mathcal{B}(12 ; 0,115)$

a) $P(N = 3) = \binom{12}{3} 0,115^3 \times 0,885^9 \approx \boxed{0,111}$

b) $P(N \geq 6) = 1 - \underbrace{P(N \leq 5)}_{\text{avec la calculatrice}} \approx \boxed{0,001}$

2) a) $\boxed{Y = 65}$ si le client ne fait pas jouer l'extension de garantie
$Y = 65 - 399 = \boxed{-334}$ sinon

b) $P(Y = 65) = 0,885$
$P(Y = -334) = 0,115$
$E(Y) = 65 \times 0,885 - 334 \times 0,115 \approx \boxed{19,12}$ €

En moyenne, cette offre est avantageuse pour l'entreprise

5)

Exercice 2 (Ex 2 Nouvelle calédonie novembre 2014)

1) $-1+i = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4} \Rightarrow (-1+i)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{15i\pi/2} = \sqrt{2}^{10} e^{-i\pi/2} = \boxed{-32i}$

$\left(\frac{15\pi}{2} = 8\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

ou

$(-1+i)^{10} = ((-1+i)^2)^5 = (-2i)^5 = -32i$

$\boxed{\text{VRAIE}}$

2) $z = a+bi$
$\bar{z} = a - bi$

$z - \bar{z} = -2+4i \iff 2bi = -2+4i \iff \begin{cases} 0 = -2 & \text{impossible} \\ 2b = 4 \end{cases}$

ou

$\mathrm{Re}(z-\bar{z}) = 0$ et $\mathrm{Re}(-2+4i) \neq 0 \Rightarrow$ pas de solution

$\boxed{\text{FAUSSE}}$

3) $\ln(\sqrt{e^7}) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$

$\frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = \frac{24}{3} = 8$

$\boxed{\text{VRAIE}}$

4) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = [F(x)]_0^{\ln 3}$ où F est une primitive de f : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$

or f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x+2$

donc $F(x) = \ln(e^x+2)$

$[F(x)]_0^{\ln 3} = \ln(e^{\ln 3}+2) - \ln(e^0+2) = \ln 5 - \ln 3 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

$\boxed{\text{VRAIE}}$

5) $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4 \qquad \mathcal{D} =]1, +\infty[$

$\underset{x\in\mathcal{D}}{\iff} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln 4$

$\underset{x\in\mathcal{D}}{\iff} \frac{x-1}{x+2} = 4$

$\underset{x\in\mathcal{D}}{\iff} 4x+8 = x-1$

$\underset{x\in\mathcal{D}}{\iff} x = -3$ or $-3 \notin \mathcal{D}$ donc pas de solution

$\boxed{\text{FAUSSE}}$

5

Exercice 3 (Ex 3 nouvelle calédonie novembre 2014)

1) a) $\boxed{I\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$ $\boxed{J\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}}$ $\vec{BK}\begin{pmatrix}x_K-1\\y_K-2\\z_K-3\end{pmatrix}$ $\frac{1}{3}\vec{BC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \boxed{K\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}}$

b) $\vec{IJ}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{IK}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ non colinéaires car coordonnées non proportionnelles

donc I, J, K ne sont pas alignés et définissent un plan

c) $\underset{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}}{\vec{n}} \cdot \underset{\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}}{\vec{IJ}} = 6+2-8=0$ $\underset{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}}{\vec{n}} \cdot \underset{\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}}{\vec{IK}} = -6+2+4=0$

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp\vec{IJ}\\ \text{et } \vec{n}\perp\vec{IK}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}$ est normal à (IJK)

$M(x,y,z)\in(IJK) \Leftrightarrow \underset{\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}}{\vec{IM}}\cdot\underset{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}}{\vec{n}}=0 \Leftrightarrow 3(x-1)+y-1+4(z-1)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{3x+y+4z-8=0}$

2) a) (BD) $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}10\\-1\\-5\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique $\boxed{\begin{cases}x=1+10t\\y=2-t\\z=3-5t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$

b) $(P)=(IJK)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

(BD) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=30-1-20\neq0 \Rightarrow \vec{n}\not\perp\vec{u} \Rightarrow (BD)\not\parallel(IJK)$

$\Rightarrow (BD)$ et (IJK) sécants (en L)

Les coordonnées (x,y,z) de L vérifient le système

$\begin{cases}3x+y+4z-8=0\\x=1+10t\\y=2-t\\z=3-5t\end{cases}$ $3+30t+2-t+12-20t-8=0$

$9t+9=0$

$\boxed{t=-1}$

$\boxed{L\begin{pmatrix}-9\\3\\8\end{pmatrix}}$

c) Le milieu de $[DL]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{11-9}{2}=1\\ \frac{1+3}{2}=2\\ \frac{-2+8}{2}=3\end{pmatrix}$, coordonnées de B

donc $\boxed{\text{B est le milieu de } [DL]}$ et donc L est le symétrique de D par rapport à B