Exercice 1

1) $f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9 = -2-2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = \boxed{5}$

2) $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = -1+i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1-i\sqrt{3}}$ d'après 1)

(du 2d degré à coefficients réels)

$\boxed{-1+i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}}$ (z_A) $\boxed{-1-i\sqrt{3} = 2e^{-2i\pi/3}}$ (z_B)

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(z) = \lambda \Leftrightarrow \boxed{z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0}$ (e) équation du 2d degré à coefficients réels

(e) a 2 solutions complexes conjuguées $\Leftrightarrow \boxed{\Delta < 0}$

$\Leftrightarrow 4 - 4(9-\lambda) < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda < 8}$

4) $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$

$|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow |(z+1)^2| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3 \Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}$

(Ω est le point d'affixe -1 et M d'affixe z)

Donc $\boxed{(F) \text{ est le cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \sqrt{3}}$ et $\boxed{A \in (F)}$ car $f(z_A) = 5$ et donc $|f(z_A) - 8| = |-3| = 3$

5) a) $f(z) = z^2 + 2z + 9 = x^2 - y^2 + 2ixy + 2x + 2iy + 9 = \boxed{(x^2 - y^2 + 2x + 9) + i(2xy + 2y)}$

b) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x+1 = 0 \end{cases}$

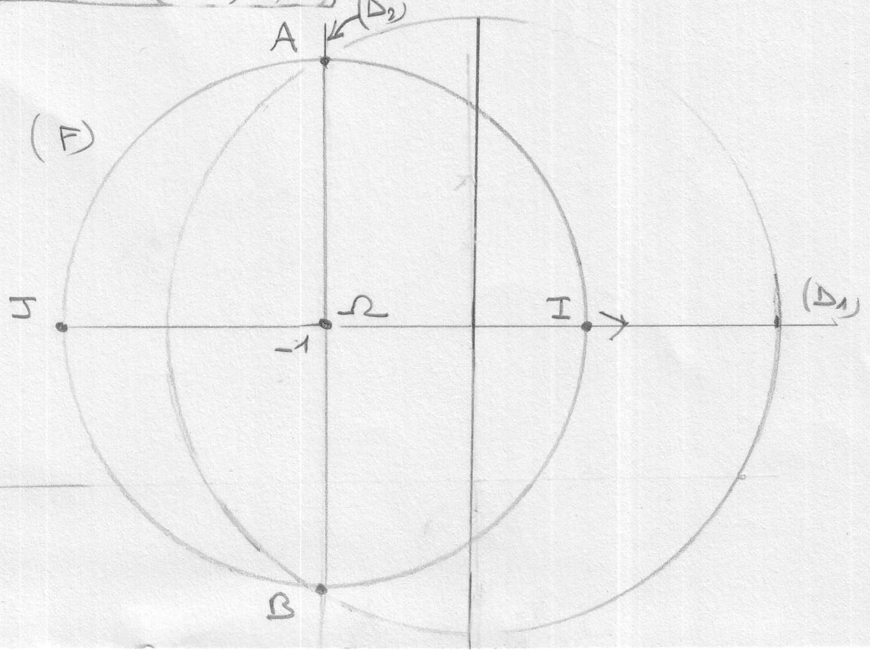
Donc (E) est la réunion de deux droites $\boxed{D_1 \text{ d'équation } y = 0}$ et $\boxed{D_2 \text{ d'équation } x = -1}$

6) Le cercle (F) a pour équation $(x+1)^2 + y^2 = 3$ $(\Omega M^2 = 3)$

$(F) \cap D_1$: $(x+1)^2 = 3$ car $y = 0$ donc $x = -1+\sqrt{3}$ ou $x = -1-\sqrt{3}$ soit 2 points d'intersection de coordonnées $\boxed{(-1+\sqrt{3}\,;0)\ I}$ et $\boxed{(-1-\sqrt{3}\,;0)\ J}$

$(F) \cap D_2$: $y^2 = 3$ car $x+1 = 0$ donc $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$ soit 2 points d'intersection de coordonnées $\boxed{(-1;\sqrt{3})\ A}$ $\boxed{(-1;-\sqrt{3})\ B}$

$\boxed{(E) \cap (F) = \{I, J, A, B\}}$



Exercice 2

A

1)

- p_n : G_n
  - $\frac{2}{5}$: G_{n+1}
  - $\frac{3}{5}$: $\overline{G_{n+1}}$
- $1-p_n$: $\overline{G_n}$
  - $\frac{1}{5}$: G_{n+1}
  - $\frac{4}{5}$: $\overline{G_{n+1}}$

2) $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$ d'après la formule des probabilités totales avec $\{G_n, \overline{G_n}\}$ comme partition

$= p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$

$= p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{5}$

Soit, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5}}$

---

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{1}{4}$ $\left(\Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{1}{4}\right)$

a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{5}\left(u_n + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{5} u_n + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$ or $\frac{1}{20} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} - \frac{1}{20} = 0$

$= \frac{1}{5} u_n$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ car $p_1 = 1$

---

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{u_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$ et donc $p_n = u_n + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}}$

c) Comme $0 < \frac{1}{5} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (p_n) = \frac{1}{4}}$

B 1) a) On a une répétition de 10 épreuves identiques et indépendantes.

Pour chaque épreuve qui consiste à jouer une partie, le succès est de gagner avec une probabilité de $\frac{1}{4}$

X est donc le nombre de succès ; sa loi est la loi binomiale de paramètres $(10 ; \frac{1}{4})$ $= \boxed{\mathcal{B}(10 ; \frac{1}{4})}$

---

b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = \boxed{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}} \simeq \boxed{0,94}$

---

c) $E(X) = 10 \times \frac{1}{4} = \boxed{2,5}$

---

2) a) $E(X) = 2,5$ est le nombre de parties qu'il peut espérer gagner sur les 10, ce qui lui rapporte $2,5 \times 8 = 20$ € < 30 €.

Donc ce jeu est désavantageux pour le joueur

---

b) Pour réaliser un bénéfice d'au moins 40 €, il doit gagner au moins 70 € car il a payé 30 € pour jouer

Mais pour gagner 70 € sur les 10 parties, il doit gagner au moins 9 parties sur les 10 $(8 \times 8 < 70 < 8 \times 9)$

On demande donc $p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$

$= \binom{10}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \simeq 0,00003$