Exercice 1

Partie I

1] $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$ par règle opératoire

$f(x) = x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) + 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

(On peut dire aussi qu'en $+\infty$ $2x$ l'emporte sur $\ln x$

2]
3] $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2x-1}{x}}$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1/2) = 1 - \ln 1/2 + 1$
$= 2 + \ln 2$

4] $x - \ln x \geqslant 0 \Rightarrow 2x - \ln x + 1 \geqslant x + 1$

donc, $\forall x \in]0, +\infty[$ $\boxed{f(x) \geqslant x + 1}$

Partie II

1] Par récurrence : P_n : « $u_n \geqslant n$ »

- P_n est vraie au rang initial 1 car $u_1 = 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons P_n vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie c'est à dire $u_{n+1} \geqslant n+1$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et par hypothèse $u_n \geqslant n \geqslant 1$ donc, comme f est croissante sur $[1; +\infty[$ on en déduit que $f(u_n) \geqslant f(n)$ or $f(n) \geqslant n+1$ d'après I] 4) donc $f(u_n) \geqslant n+1$ soit $u_{n+1} \geqslant n+1$
- La proposition P_n est vraie au rang initial 1 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2] (u_n) semble croissante. Démontrons cette conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ or d'après I] 4) $f(x) - x \geqslant 1$ $\forall x \in]0, +\infty[$

donc $f(u_n) - u_n \geqslant 1$

- et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ c'est à dire (u_n) est croissante

3] D'après II] 1) et par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Partie III

1] La condition $U_1 < A_1$ est fausse donc $N = 1$ est affiché

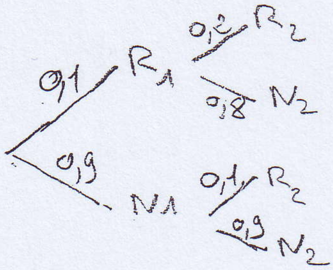
2] L'algorithme affiche la première valeur de N pour laquelle $u_N \geqslant 10^4 = 10000$
soit $N = 15$ avec la calculatrice

3] La variable U contient 1 initialement, puis à la fin de la $i^{ème}$ boucle si elle a lieu, contient $f(u_i) = u_{i+1}$
L'algorithme s'arrête quand la variable $U \geqslant A$; or (u_n) diverge vers $+\infty$ donc à partir d'un certain rang $u_n \geqslant A$ et donc l'algorithme s'arrêtera car U contient u_{i+1} à la fin de la $i^{ème}$ boucle

Comme (u_n) est croissante, la valeur en sortie est le rang à partir duquel $u_n \geqslant A$

Exercice 2

1)



2) $E = R_1 \cup R_2 \Rightarrow p(E) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0,1 \times 0,2 = \boxed{0,02}$

$F = (R_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup R_2) \Rightarrow p(F) = p(R_1) \times p_{R_1}(N_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(R_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,1 = \boxed{0,17}$

3) a) loi de X

x_i	9	1	-1
p_i	0,02	0,17	0,81 $(1-0,02-0,17)$

« $X = 9$ » $= E$

« $X = 1$ » $= F$

b) $E(X) = 0,02 \times 9 + 0,17 - 0,81 = \boxed{-0,46}$

En moyenne, il perd 46 cents par partie

4) a) On a une répétition d'épreuves identiques et indépendantes à 2 issues dont l'une est « Lancer la roue B » $= R_1$ $(p(R_1) = 0,1)$

Si on note X_n le nombre de succès, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,1)$

$p_n = p(X_n \geq 1) = 1 - p(X_n = 0) = 1 - (0,9)^n$

b) Comme $0,9 \in]-1;1[$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1}$

c) $p_n > 0,9 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,1$ passage à ln

$\Leftrightarrow n \ln 0,9 < \ln 0,1$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,9} = 21,8..$ $\ln 0,9 < 0$

donc $p_n > 0,9$ à partir de $\boxed{n = 22}$