Exercice 1 — Décembre 2015 — $T^{le}S$

A) 1) a) $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x \Rightarrow f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3$
$= 3(2x-1)^2$

$f_1(0) = 0$; $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$; f_1 dérivable donc continue sur $[0;1]$ car f_1 est un polynôme et f_1 est croissante sur $[0;1]$ car sa dérivée est positive sur $[0;1]$

b) Graphiquement $f_1(x) \leq x$ pour $x \in [\frac{1}{2}; 1] \cup \{0\}$

Pour $x \in [0{,}51 ; 0{,}99]$, $f(x) < x$, la nuance est donc éclaircie par f_1

2) $g(x) = f_2(x) - x = \ln[1 + (e-1)x] - x$

a) $\forall x \in [0;1]$ $g'(x) = \dfrac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \dfrac{e-1-(1+(e-1)x)}{1+(e-1)x} = \dfrac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$

b) $\forall x \in [0;1]$ $g'(x)$ est du signe de $(e-2)-(e-1)x$ car f_2 étant définie sur $[0;1]$, $1+(e-1)x > 0$

x	0 α $\frac{e-2}{e-1}$ β 1
$g'(x)$	+ ϕ −
g	0 ↗ 0,05 ↗ 0,12 ↘ 0,05 ↘ 0

$0 < e-2 < e-1$

$\Rightarrow 0 < \frac{e-2}{e-1} < 1$ $\quad \frac{e-2}{e-1} \approx 0{,}418$

$g(0) = 0$

$g(1) = f_2(1) - 1 = 0$ car f_2 fonction de retouche

$g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \approx 0{,}12$ (donné)

$0{,}05 \in g([0, \frac{e-2}{e-1}]) = [0; 0{,}12]$ et $0{,}05 \in g([\frac{e-2}{e-1}, 1]) = [0; 0{,}12]$ et comme g est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $[0, \frac{e-2}{e-1}]$ et $[\frac{e-2}{e-1}; 1]$, l'équation $g(x) = 0{,}05$ a exactement 2 solutions α et β, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

x	0 — 0,08 α 0,09	0,09 — 0,85 β 0,86	0,86 — 1
$g(x)$	$g(x) < 0{,}05$	$g(x) > 0{,}05$	$g(x) < 0{,}05$

Tableau

B) 1) L'algorithme donne le nombre de nuances pour lesquelles la fonction de retouche apporte une modification perceptible visuellement

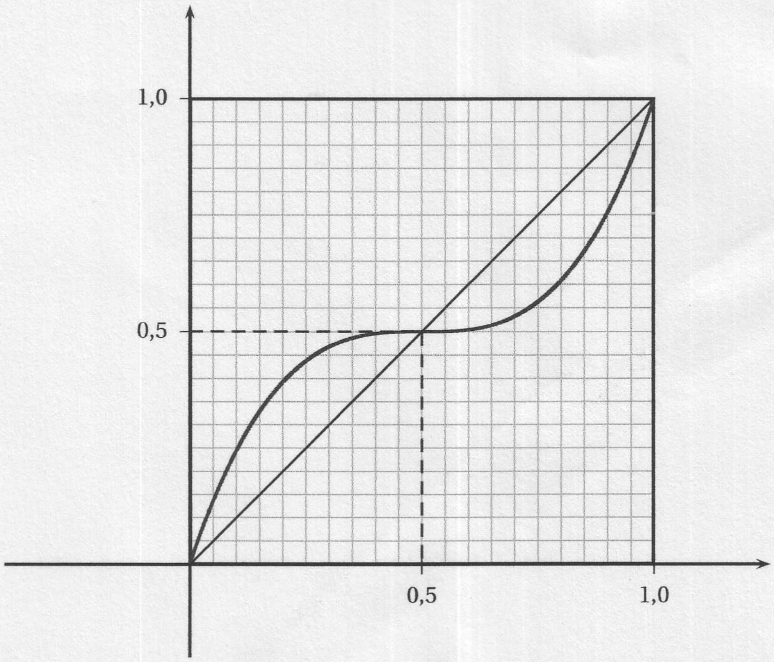
2) Avec $f = f_2$ $\quad |f_2(x) - x| = |g(x)| = g(x)$ car $g \geq 0$ sur $[0;1]$

$E \geq 0{,}05 \Leftrightarrow g(x) \geq 0{,}05 \Leftrightarrow x \in [0{,}09 ; 0{,}85]$ d'après le Tableau

L'algorithme retourne donc $85 - 9 + 1$ nuances

soit 77

Courbe représentative de la fonction f_1



Exercice 2

A] 1) $\forall x > 0 \quad u'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow u$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2)

x	2		α		3
u	$\ln 2 - 1 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 3 > 0$

u continue et strictement croissante sur $[2;3]$, et $0 \in u([2;3]) = [\ln 2 - 1, \ln 3]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, α, dans $[2;3]$

3)

x	0	2		α	3		$+\infty$
u	$\|\|$		$\nearrow$	0		$\nearrow$	
$u(x)$	$\|\|$		$-$	0		$+$	

B] 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x - 2) = -\infty$ donc, par produit

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

2) a) $\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{u(x)}{x^2}$$

b) $\forall x > 0 \quad f'(x)$ est du signe de $u(x)$ d'où le tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

d'après A] 3)

C] $f(x) - \ln(x) = \underbrace{\ln x - 2 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}}_{f(x)} + 2 - \ln x = \frac{2 - \ln(x)}{x}$

L'abscisse x d'un point d'intersection est solution de l'équation

$f(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2$

Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ n'ont qu'un seul point d'intersection de coordonnées $(e^2; 2)$