Correction du contrôle 4 Décembre 2016 1e S

Exercice 1

1) $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$g(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty\,(-\infty)} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty\,(-\infty)} (x^3) = +\infty \; (-\infty)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			0	$-$			0	$+$			
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $[0,2]$, $[2,+\infty[$, avec 0 comme valeur intermédiaire, on démontre que l'équation $g(x)=0$ a exactement 3 solutions x_1, x_2, x_3

$-0{,}6 < x_1 < -0{,}5$
$0{,}6 < x_2 < 0{,}7$
$2{,}8 < x_3 < 2{,}9$

2) $f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{1+x^3} = \frac{1+x^3-3x^2}{1+x^3} = \boxed{\frac{g(x)}{1+x^3}}$ qui est du signe de $g(x)$ sur $]-1,+\infty[$

car $1+x^3 > 0$ pour $x > -1$

3) $\ln(1+x^3) = \ln\left(x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right) = \ln(x^3) + \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right) = 3\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$ pour $x>0$

4) Limite en -1^+ On pose $X = 1+x^3$ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} X = 0^+$ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (\ln(1+x^3)) = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} (\ln X) = -\infty$

On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (x-2) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (-\ln(1+x^3)) = +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty}$

Limite en $+\infty$ Il y a une forme indéterminée, mais d'après 3)

$f(x) = x - 2 - 3\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right) = 0$ par composée

$x - 3\ln x = \underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty}\Big(1 - 3\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\downarrow\, 0}\Big) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

5)

x	-1		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-2{,}4$	$\nearrow$	$-1{,}6$	$\searrow$	$-2{,}3$	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ pour $x > -1$

6) Il s'agit de résoudre $f'(x) = 1$ pour $x > -1$ $\Leftrightarrow \frac{-3x^2}{1+x^3} = 0 \Leftrightarrow -3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

T est donc la tangente en 0 d'équation $\boxed{y = x-2}$ $\left|\begin{array}{l} f'(0)=1 \\ f(0) = -2 \end{array}\right.$

7) $f(x) - (x-2) = -\ln(1+x^3)$

x	-1		0		
$1+x^3$		<1	1	>1	
$-\ln(1+x^3)$		$+$	0	$-$	

x	-1		0		$+\infty$
		$\mathcal{C}$ au dessus		$\mathcal{C}$ en dessous	

Exercice 2

I) 1) a) $f'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1(x+2) - 1\times x}{(x+2)^2} = \dfrac{x+4}{(x+2)^2}$

b) $\forall x > -2$, $f''(x) > 0$ donc f' strictement croissante sur $]-2, +\infty[$

c) On pose $X = x+2$ $\quad \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} X = 0 \quad \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} (\ln(x+2)) = \lim\limits_{X \underset{>}{\to} 0} (\ln X) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} \left(\dfrac{x}{x+2}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+2)) = \lim\limits_{X \to +\infty} (\ln X) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+2}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

2) a)

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f' continue et strictement croissante sur $]-2, +\infty[$

$0 \in]-\infty, +\infty[$ image de $]-2, +\infty[$ par f', donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une seule solution α dans $]-2, +\infty[$

$f'(-0{,}6) < 0$ et $f'(-0{,}5) > 0$ donc $\alpha \in [-0{,}6 ; -0{,}5]$
$\approx -0{,}09 \qquad \approx 0{,}07$

b)

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

3)

x	-2		α		$+\infty$
f	$\|\| +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a vu que $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} (\ln(x+2)) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+2)) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

II) 1) T_0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$ $\qquad f'(0) = \ln 2$
$\qquad f(0) = 1$

$\boxed{y = \ln 2 \times x + 1}$
$(x \ln 2 + 1)$

2) Il s'agit de trouver $a > -2$ tel que $-af'(a) + f(a) = 0 \quad (E)$

$\left(\begin{array}{l} T_a \text{ a pour équation } y = f'(a)x - af'(a) + f(a) \\ \text{et } T_a \text{ passe par } O \Leftrightarrow -af'(a) + f(a) = 0 \end{array} \right)$

$(E) \Leftrightarrow f(a) = af'(a) \Leftrightarrow a\ln(a+2) + \dfrac{a^2}{a+2} = 1 + a\ln(a+2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a+2} = 1$

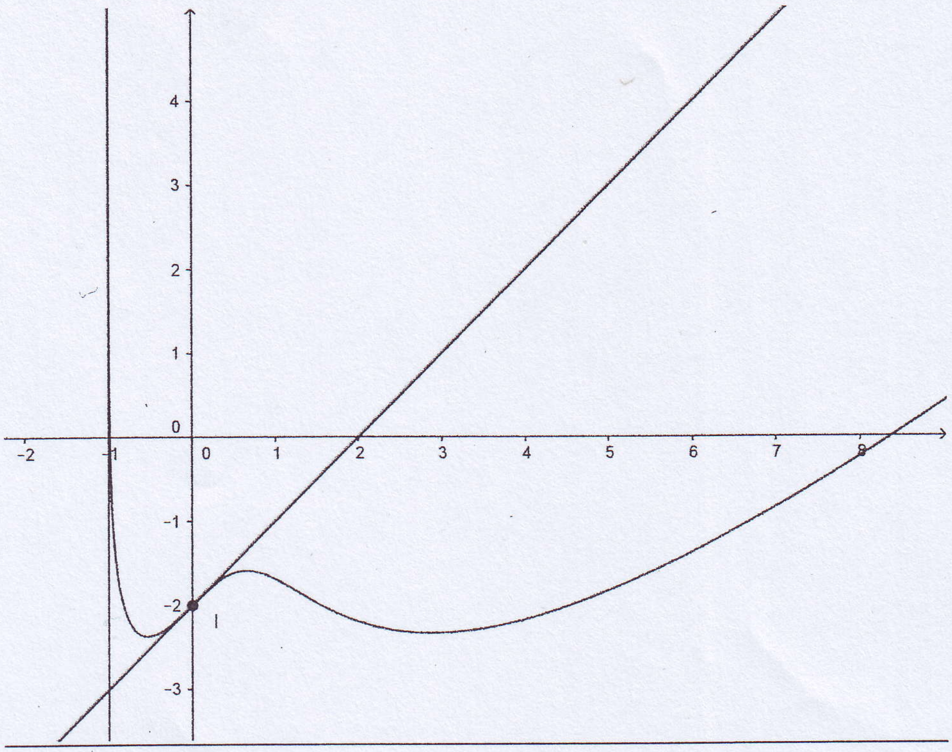
$\Leftrightarrow a^2 = a+2$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \ (> -2) \\ \text{ou} \\ a = 2 \ (> -2) \end{array} \right.$

Les tangentes qui passent par l'origine sont celles en -1 et en 2

Annexe 1



Annexe 2