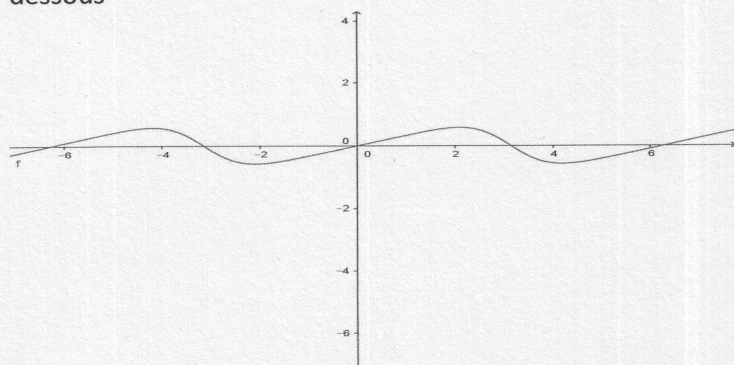


**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$  dont la courbe représentative est donnée ci-dessous



1) Pourquoi  $f$  est-elle définie sur  $\mathbb{R}$  ?

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2+\cos(x) \geq 1$ , donc le dénominateur ne s'annule pas

2) Pourquoi  $f$  est-elle périodique de période  $2\pi$  ?

$f(x+2\pi) = f(x)$  car les fonctions sinus et cosinus sont de période  $2\pi$

3) Pourquoi est-elle impaire ?

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$  donc  $f$  est impaire

4) Démontrer que  $f'(x)$  est du signe de  $\cos(x) + \frac{1}{2}$  et en déduire les variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) - (-\sin(x))\sin(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) + 1}{(2+\cos(x))^2}$  qui est du signe de  $\cos(x) + 1/2$

| $x$     | 0                          | $2\pi/3$                     | $\pi$ |
|---------|----------------------------|------------------------------|-------|
| $f'(x)$ | +                          | -                            |       |
| $f$     | $f$ strictement croissante | $f$ strictement décroissante |       |

$$f(2\pi/3) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

5) Expliquer alors la courbe donnée

Le tableau de variations de  $f$  précédent permet de tracer  $C_f$  sur  $[0, \pi]$

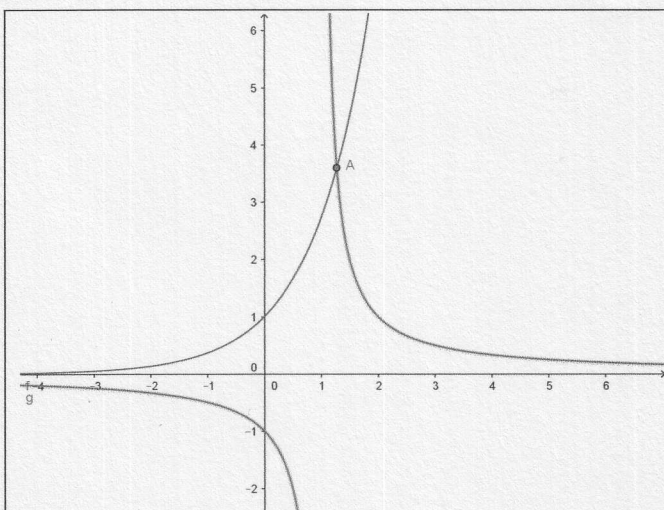
$f$  est impaire donc  $O$  est centre de symétrie de  $C_f$  donc on en déduit la courbe sur  $[-\pi, \pi]$

$f$  est de période  $2\pi$  donc par translation on peut tracer  $C_f$ , par exemple sur  $[-3\pi, 3\pi]$

**Exercice 2**

a) En affichant avec la calculatrice les courbes représentatives des fonctions  $u$  et  $v$  définies par

$$u(x) = e^x \text{ et } v(x) = \frac{1}{x-1}, \text{ donner le nombre de solutions de l'équation (E) : } u(x) = v(x)$$



Il n'y a qu'un point d'intersection, donc une seule solution entre 1 et 2

b) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x(x-1)$

1) Donner une équation (F) portant sur  $f$  équivalente à (E)

$(E) \Leftrightarrow f(x) = 1$  et comme 1 n'est pas solution de l'équation  $f(x)=1$  on a  $(E) \Leftrightarrow f(x) = 1 : (F)$

2) Dresser le tableau de variations complet de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$  qui est du signe de  $x$  car  $e^x > 0$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$

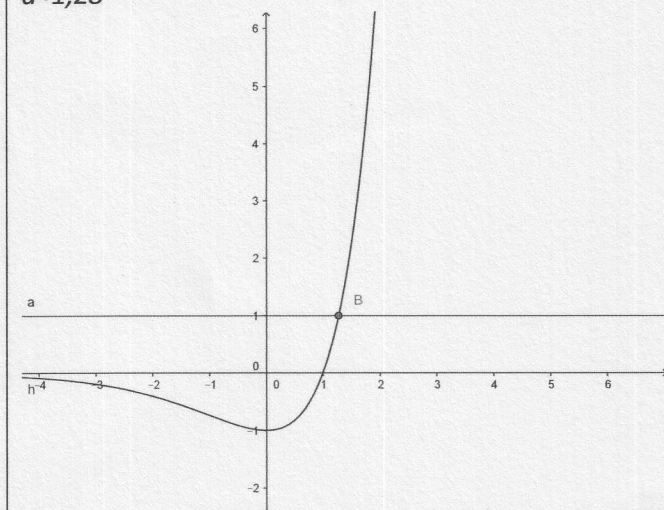
| $x$     | $-\infty$                    | $0$ | $+\infty$                  |
|---------|------------------------------|-----|----------------------------|
| $f'(x)$ | -                            |     | +                          |
| $f$     | $f$ strictement décroissante |     | $f$ strictement croissante |

$f(0) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  par règles opératoires et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  car  $f(x) = xe^x - e^x$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

3) En déduire le nombre de solutions de (F) et en donner une valeur approchée à 0,01 près

Sur  $]-\infty, 0[$  (F) n'a pas de solution car  $f(]-\infty, 0[) = ]-1, 0[$  et sur  $[0, +\infty[$  (F) n'a qu'une seule solution, notée  $a$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, car  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  et  $1 \in [-1, +\infty[$  image de  $[0, +\infty[$  par  $f$ .

$a \approx 1,28$



### Exercice 3

a) Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $u(x) = |x| - |x-1|$

Exprimer u sur chacun de ces intervalles  $]-\infty, 0[$ ,  $[0, 1]$  et  $]1, +\infty[$

| x    | $-\infty$ | 0    | 1   | $+\infty$ |
|------|-----------|------|-----|-----------|
| x    | -x        | x    | x   |           |
| x-1  | 1-x       | 1-x  | x-1 |           |
| u(x) | -1        | 2x-1 | 1   |           |

b) En déduire l'expression de la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{u(x)}$

sur  $]-\infty, 0[$ ,  $f(x) = e^{-1} = \text{constante}$

sur  $[0, 1]$ ,  $f(x) = e^{2x-1}$

sur  $]1, +\infty[$ ,  $f(x) = e = \text{constante}$

c) Déterminer les variations de f sur  $[0, 1]$

On a sur  $[0, 1]$   $f'(x) = 2e^{2x-1}$  par dérivée de composée :  $(e^u)' = u'e^u$

donc f strictement croissante sur cet intervalle car  $e^{2x-1} > 0$  pour tout x

d) Tracer  $C_f$  par rapport à un repère orthonormé

