Correction du contrôle n°2 octobre 2017 Terminale S

Partie A

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2+x+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ (règle opératoire)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ (règle spécifique)

2) L'axe des ordonnées est asymptote

3) $f'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2+x+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

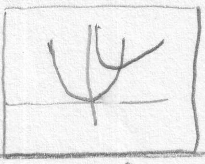
4) $f'(x)$ est du signe de x^2-1 sur $]0, +\infty[$ d'où le tableau de variations suivant

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x+1)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

donc la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Partie B

1)  1 seule solution sur $]0, +\infty[$

2) $f(x) = x^2 \iff \begin{cases} x \neq 0 \text{ et} \\ x^2+x+1 = x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \text{ et} \\ x^3-x^2-x-1 = 0 \end{cases}$

3) $g'(x) = 3x^2-2x-1$ qui a 2 racines 1 et $-1/3$ $(\Delta = 16)$

x	$-\infty$		$-1/3$		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0			$+$	
g	$-\infty$	↗	$-0,81$	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

$g(1) = -2$ et $g(-1/3) \simeq -0,81$

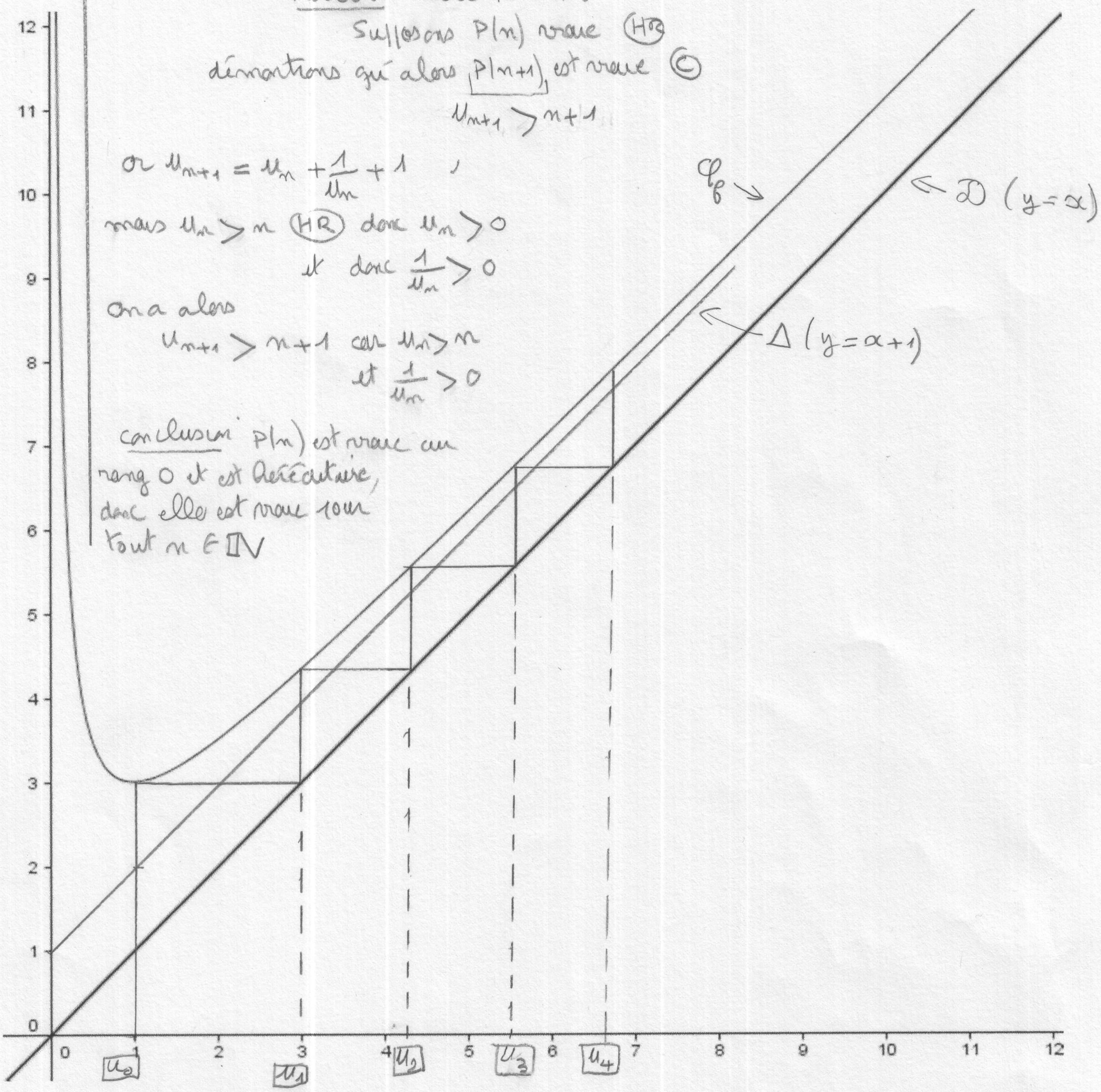
Sur $]-\infty, 1]$ la valeur maximale de g est $-0,81$ donc g ne s'annule pas sur cet intervalle

Sur $[1, +\infty[$, comme g est continue et strictement croissante et 0 est compris entre $g(1) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans cet intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et $\alpha > 1$

Partie C

1)



2] Soit $P(n)$: « $u_n > n$ »

initialisation $P(0)$ vraie car $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie (HR)

démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie (C)

$u_{n+1} > n+1$

or $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} + 1$,

mais $u_n > n$ (HR) donc $u_n > 0$

et donc $\frac{1}{u_n} > 0$

On a alors

$u_{n+1} > n+1$ car $u_n > n$

et $\frac{1}{u_n} > 0$

conclusion $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3]. On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} + 1 \geqslant 0$

(u_n) est donc croissante

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

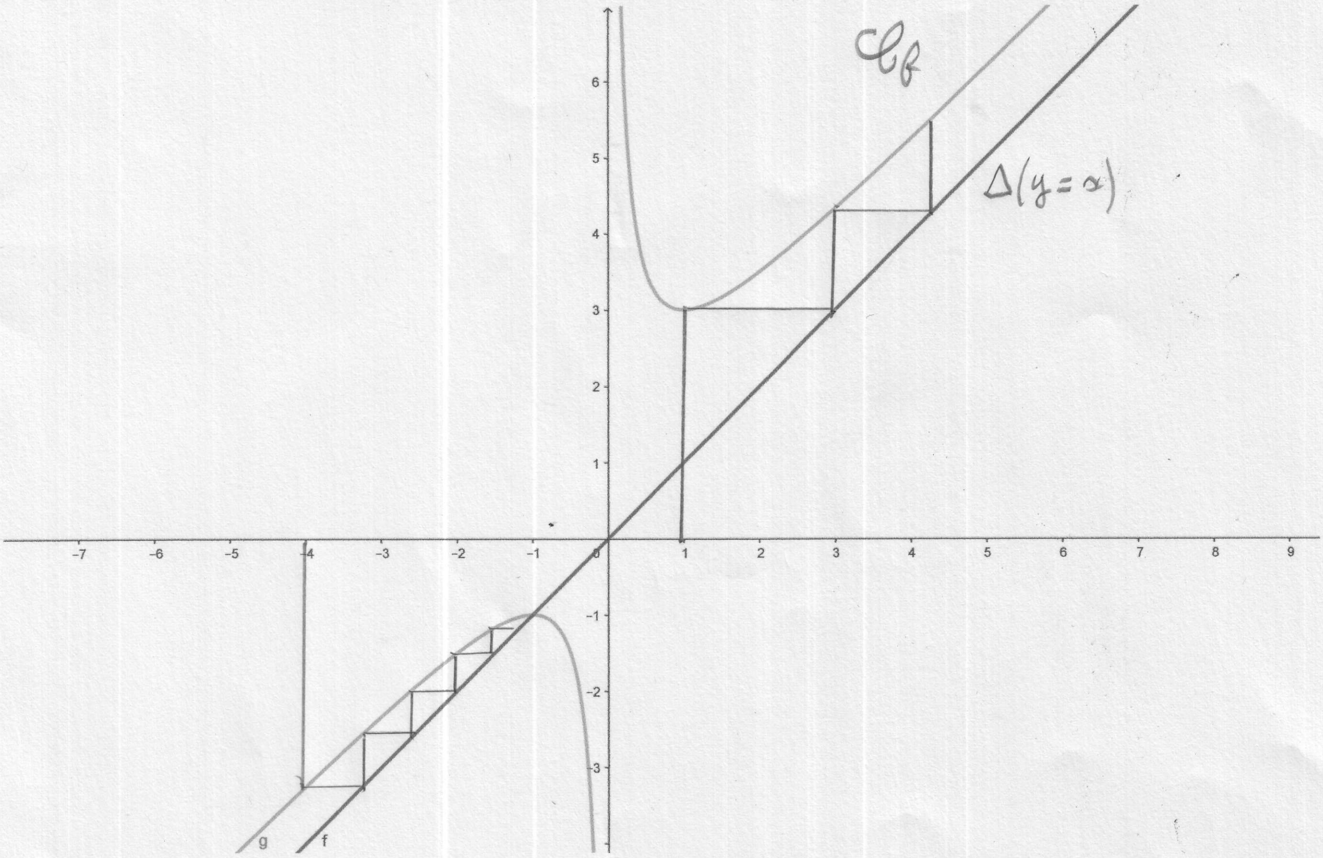
(On pouvait aussi démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$)

4] Soit par le calcul, soit par un graphique, il semblerait que dans ce cas (u_n) est croissante et converge vers -1

l doit vérifier la relation de récurrence : $\boxed{l = l + \frac{1}{l} + 1}$

d'où $\frac{1}{l} = -1$ et $\boxed{l = -1}$

NOM :



Règle spécifique

Pour les limites de polynômes ou de quotient de polynômes **en l'infini** la règle dite spécifique se démontre ainsi :

Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ où $\boldsymbol{a_n} \neq \mathbf{0}$ (P est dit de degré n)

On a $\boxed{P(x) = a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n})}$ pour $x \neq 0$

Or $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$ d'après les règles opératoires.
Donc $\lim_{x\to\infty}\big(P(x)\big) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n)$
On dit qu'un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré **en l'infini**.

Pour le quotient de deux polynômes, le principe est le même, il suffit d'utiliser l'écriture encadrée, c'est-à-dire celle obtenue en factorisant par le terme de plus haut degré.

Ainsi le quotient de deux polynômes se comporte comme le quotient des termes de plus haut degré **en l'infini**.