$\boxed{\text{Exercice 1}}$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \implies$ g strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(x) = x^3\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$ pour $x \neq 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ par règles opératoires

et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Sur $\mathbb{R}$, g est strictement croissante et continue, de plus 0 est compris entre $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution, notée α, dans $\mathbb{R}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\boxed{0{,}59 < \alpha < 0{,}60}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) a) $\forall x \in]-1, +\infty[\quad f'(x) = \dfrac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}$

or $-x^4 - 3x^2 + 2x = -x(x^3 + 3x - 2) = -x\,g(x)$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-x\,g(x)}{(x^3+1)^2}}$ qui est du signe de $-x\,g(x)$ pour $x > -1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}}\right)$ pour $x \neq 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ par règles opératoires

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^2+1) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^3+1) = 0^+$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^3+1		$-$	0	$+$	

$\implies \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty}$ par règles opératoires

x	-1		0		α		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$1{,}18$	$\searrow$	0

$g(0) = 1$

$g(\alpha) \simeq 1{,}18$ et $\alpha \simeq 0{,}60$

c) Il y a 2 asymptotes en $+\infty$ d'équation $y = 0$ ("horizontale")

en -1 d'équation $x = -1$ ("verticale")

Exercice 2

1) $f(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+x+1}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$+$	

$x^2+x+1 > 0$ car $\Delta < 0$

u est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$u'(x) = 4\left(\frac{2x(x^2+x+1) - (2x+1)x^2}{(x^2+x+1)^2}\right) = 4 \times \frac{(x^2+2x)}{(x^2+x+1)^2}$$

2)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$?$	$+$	
f	2	$\nearrow$	$\approx 2{,}3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

$f(0) = 0$

$f(-2) = \sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$

On pose $X = \dfrac{4x^2}{x^2+x+1} = u(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} X = 4$ car $X = \dfrac{4}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} f(x) = \lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2$ (par composée) $\Rightarrow$ Il y a une asymptote d'équation $y=2$ en $+\infty$ et en $-\infty$

3) $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{\sqrt{\frac{4h^2}{h^2+h+1}}}{h} = \dfrac{2|h|}{h} \times \dfrac{1}{\sqrt{h^2+h+1}}$

dérivabilité à droite de 0 : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \left(\dfrac{f(h)}{h}\right) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \dfrac{2}{\sqrt{h^2+h+1}} = 2$ car $|h| = h$ $(h>0)$

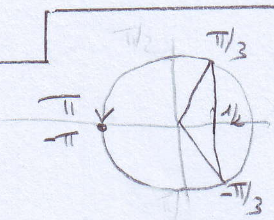
dérivabilité à gauche de 0 $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \left(\dfrac{f(h)}{h}\right) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \dfrac{-2}{\sqrt{h^2+h+1}} = -2$ car $|h| = -h$ $(h<0)$

nombre dérivé à droite $\neq$ nombre dérivé à gauche

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 0

(Il y a cependant 2 demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs -2 et 2)

Exercice 3



1) $1 - 2\cos X = -2\left(\cos X - \frac{1}{2}\right)$

X	$-\pi$		$-\pi/3$		$\pi/3$		π
$\cos X - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$1 - 2\cos X$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) On pose $X = 2x$ $\quad x = \frac{X}{2}$

→ x	$-\pi/2$		$-\pi/6$		$\pi/6$		$\pi/2$
X	$-\pi$		$-\pi/3$		$\pi/3$		π
$1 - 2\cos X$		$+$	0	$-$	0	$+$	
→ $1 - 2\cos 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) $\forall x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right] \quad f'(x) = 1 - 2\cos(2x)$

x	$-\pi/2$		$-\pi/6$		$\pi/6$		α		$\pi/2$
avec 2) $f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
f	$\approx -1{,}57$	↗	$\approx 0{,}34$	↘	$\approx -0{,}34$	↗	$\boxed{0{,}5}$	↗	$\approx 1{,}57$

4) • Sur $\left[-\pi/2, \pi/6\right]$ l'équation $f(x) = 0{,}5$ n'a pas de solution car f prend au plus la valeur $0{,}34$

• Sur $\left[\pi/6, \pi/2\right]$, f est continue et strictement croissante, de plus $0{,}5 \in \left[\underbrace{f(\pi/6)}_{<0}, \underbrace{f(\pi/2)}_{>1{,}5}\right]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}5$ n'a qu'une seule solution dans $\left[\pi/6, \pi/2\right]$

• Soit x_0 solution de l'équation $f(x) = 0{,}5$, alors x_0 vérifie $\sin(2x_0) = x_0 - 0{,}5$ et comme $\sin(2x_0) \in [-1, 1]$, alors $x_0 - 0{,}5 \in [-1, 1]$ et donc $-0{,}5 \leq x_0 \leq 1{,}5$

or $-\pi/2 < -0{,}5$ et $1{,}5 \leq \pi/2$ donc $x_0 \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$

Autrement dit, il n'y a pas de solution en dehors de $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$