Contrôle n°1 — correction succincte

(Exercice juin 2014 Antilles-Guyane)

Exercice 1)

1] a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) (u_n) semble décroissante à partir du rang 1

2] a) Soit $P(n)$ la proposition « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ »

initialisation $P(1)$: « $\underbrace{u_1}_{3,4} \geqslant \underbrace{\frac{15}{4} \times 0,5}_{1,875}$ » VRAIE

hérédité Soit n un entier quelconque, $n \geqslant 1$

Supposons $P(n)$ vraie : $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ (HR)

démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie : $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$ (C) :

On a

$u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n \geqslant \frac{3}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n$ d'après (HR)

or $\frac{3}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n = \frac{15}{4} \times 0,5^n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$

car $0,5^n \overset{(*)}{\geqslant} 0,5^{n+1}$

$(*) \begin{cases} 1 > 0,5 \\ 0,5^n > 0,5^{n+1} \end{cases}$ $0,5^n > 0$

donc $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$ (C)

conclusion

La proposition $P(n)$ est vraie au rang initial 1 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n\right) - u_n$

$= -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0,5^n$

mais $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ d'après 2) a)

donc $-\frac{4}{5} u_n \leqslant -3 \times 0,5^n$

et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0,5^n \leqslant 0$

c) D'après 2) b) (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et est minorée par 0 d'après 2) a), en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n \geqslant 0$ et $u_0 \geqslant 0$

Donc (u_n) est convergente

3] a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \underbrace{10 \times 0,5^{n+1}}_{5 \times 0,5^n} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n - 5 \times 0,5^n = \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0,5^n$

d'où $v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0,5^n) = \frac{1}{5} v_n$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 10$
$= -8$

---

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

et $u_n = v_n + 10 \times 0,5^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$

---

c) $0 < \frac{1}{5} < 1$ et $0 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5^n) = 0$

et au final $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$

Exercice 2

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) - u_n = -u_n^2 \leq 0$
donc (u_n) est décroissante

c) (u_n) est décroissante et est minorée par 0, donc elle admet une limite l, $l \geq 0$
$f(x) = x \Leftrightarrow -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $l = 0$

d) La population finira par disparaître

3) $f(x) = 1{,}8x(1-x) = -1{,}8x^2 + 1{,}8x$

a) $f'(x) = -3{,}6x + 1{,}8$

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0{,}45$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$
$f(1) = 0$
$f(1/2) = 1{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}45$

On a bien $f(\frac{1}{2}) = 0{,}45 \in [0; \frac{1}{2}]$

Par récurrence

b) Considérons directement la proposition $P(n)$ « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ »

- initialisation : $P(0)$ vraie car $u_0 = 0{,}3$ et $u_1 = f(0{,}3) = 1{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}378$
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $P(n)$ vraie : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ »
démontrons qu'alors $P(n+1)$ vraie « $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$ »

On sait que f est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$ donc de

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, on en déduit $\underbrace{f(0)}_{0} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{f(\frac{1}{2})}_{0{,}45} \left(\leq \frac{1}{2}\right)$

et donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$

- $P(n)$ est vraie au rang initial 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ d'après b), donc (u_n) converge vers une limite l, $l \leq \frac{1}{2}$.

$f(x) = x \Leftrightarrow 1{,}8x(1-x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 1{,}8(1-x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 1{,}8x = 0{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{4}{9} \approx 0{,}444 \end{cases}$

Comme (u_n) est croissante, (u_n) est minorée par $u_0 = 0{,}3$, donc $l \neq 0$ et donc $l = \frac{4}{9}$

d) La population se stabilisera à 444 individus