EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

Supprimées

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les évènements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage ».
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :
$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Exercice 2

Dans une urne, il y a 10 billets dont 2 seulement permettent de gagner de l'argent : un de 100 euros et un autre de 10 euros.
Le jeu consiste à prendre, l'un après l'autre, 2 billets de l'urne, et s'ils sont tous les deux perdants, d'en prendre un autre dans l'urne.
Une fois un billet tiré, il n'est pas remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire donnant la somme, en euros, gagnée à l'issue de ce jeu.
A la fin du jeu, tous les billets sont remis dans l'urne.

1) Déterminer la loi de X. (un arbre de probabilités pourra être utilisé , et bien construit vaudra comme preuve)

2) En considérant qu'il faut payer m euros pour faire une partie, quelle doit être la valeur de m pour que le jeu soit équitable ?

3) Une personne effectue 10 fois de suite ce jeu de façon indépendante.
Quelle est la probabilité pour qu'au moins une fois, elle gagne au moins 100 euros ?

Les résultats seront exprimés en fractions irréductibles pour les questions 1 et 2, et sous forme décimale avec 3 décimales pour la question 3 .

Problème

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

Aide $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$

pour $n \in \mathbb{N}$

1°)Étudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2°)Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3°)En déduire le tableau de variation de g.

4°)Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans IR.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α

5°)En déduire le signe de g.

Partie II : Étude de f

1°)Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Vous pourrez démontrer que pour $x \leq 0$ $f(x) \geq x^2 + x + 1$

2°)Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

3°)En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variations.

4°)Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

5°)Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
Préciser la position de (C) par rapport à Δ.

6°)Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

7°)Tracer Δ, T puis (C).

Spécialité

Principe: Il s'agit de coder des blocs de 2 ou 3 lettres de telle sorte qu'un bloc soit codé de manière unique et que 2 blocs différents soient codés par 2 blocs différents.

Notation : le bloc (y_i , ..) représente le codage du bloc (x_i , ..) pour un chiffrement de Hill où tous les x_i et y_i sont dans $\{0,1,..,25\}$.

Partie A

On donne le système de chiffrement de Hill suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \equiv y_1(26)\ avec\ y_1 \in \{0,1,..,25\} \\ 10x_1 + 5x_2 \equiv y_2(26)\ avec\ y_2 \in \{0,1,..,25\} \end{cases}$$

Démontrer que si $3x_1+x_2=13$ alors $y_1=y_2$.

En déduire un couple de lettres différentes codé par un couple de lettres identiques.

Coder les couples (1 , 2) et (14 , 2).

Partie B

1) On donne les 2 matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 13 & 5 & -8 \\ 22 & -5 & -2 \\ -27 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner le produit AB et en déduire l'inverse de A.

2) Résoudre l'équation $25x \equiv 1(26)$ $où$ $x \in \{0,1,..,25\}$

3) On donne le système de chiffrement de Hill suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \equiv y_1(26)\ avec\ y_1 \in \{0,1,..,25\} \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \equiv y_2(26)\ avec\ y_2 \in \{0,1,..,25\} \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 \equiv y_3(26)\ avec\ y_3 \in \{0,1,..,25\} \end{cases}$$

Ecrire ce système sous forme matricielle.

Coder le mot BAC ($x_1=1$ $x_2=0$ $x_3=2$).Vous pouvez utiliser les matrices.

En utilisant les questions 1 et 2, déterminer une matrice C dont tous le coefficients sont dans $\{0,1,..,25\}$ vérifiant $AC \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (26)

En déduire le système qui permet de décoder.

Vérifier en utilisant le codage de BAC trouvé auparavant.