

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

a) Soit $u = -3 + 3i$. Donner une écriture exponentielle de u

b) Trouver z , sous forme exponentielle, tel que $u \cdot z = 6\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$

En déduire que $z = -1 - i\sqrt{3}$

c) *Sans avoir besoin de la calculatrice* en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Partie B

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$

Soit A B C D 4 points d'affixes respectives

$$z_A = 8 \quad z_B = 8i \quad z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad z_D = z_B e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

2) Démontrer que $z_C = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_D = -4\sqrt{3} - 4i$.

3) Démontrer que A B C D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

4) a) On note z_1 et z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$

Démontrer que $z_2 = z_1\sqrt{3}$

b) On note z_3 et z_4 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

Calculer $|z_3|$ et $|z_4|$

c) Démontrer que ABDC est un trapèze isocèle

5) Démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

On note I le point d'intersection des droites (AB) et (CD)

Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

Exercice 2

1) En utilisant l'écriture exponentielle de nombres complexes judicieusement choisis, démontrer que $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) - \sin(x))$

2) *En déduire le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par $f(x) = e^x \cos(x)$.*

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p , alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a [7]$ et $x \equiv a [19]$, alors $x \equiv a [133]$.

2. 1. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que $a^6 \equiv 1 [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1 [7]$.
En déduire que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.
2. On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.
3. On admet que pour tout entier naturel a , $(a^{25})^g \equiv a [19]$.
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A , est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A , l'entier r tel que $a^{25} \equiv r [133]$ avec $0 \leq r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1 [133]$ avec $0 \leq r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.