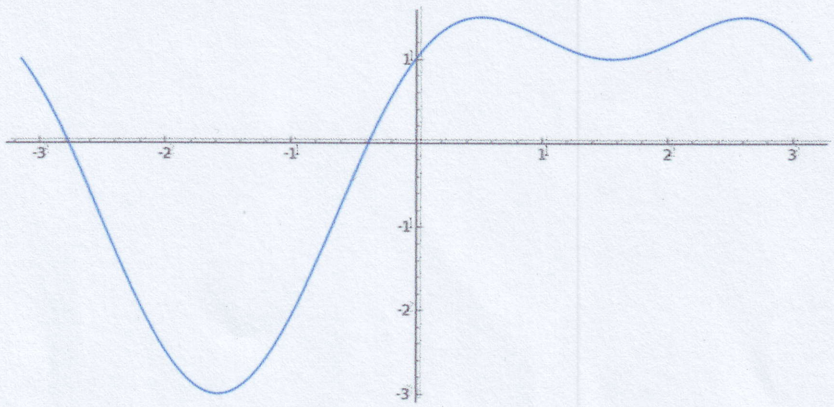
Contrôle 4 décembre 2013 obligatoire terminale S

exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur [$-\pi$; π] par $f(x) = \cos(2x) + 2\sin(x)$

La courbe est donnée à titre indicatif :



1) Calculer f'(x) et démontrer que, pour tout x dans [$-\pi$; π] , on a

$$f'(x) = -4\cos(x)(\sin(x) - \frac{1}{2})$$

2) En déduire le tableau de variations complet de f sur [$-\pi$; π]

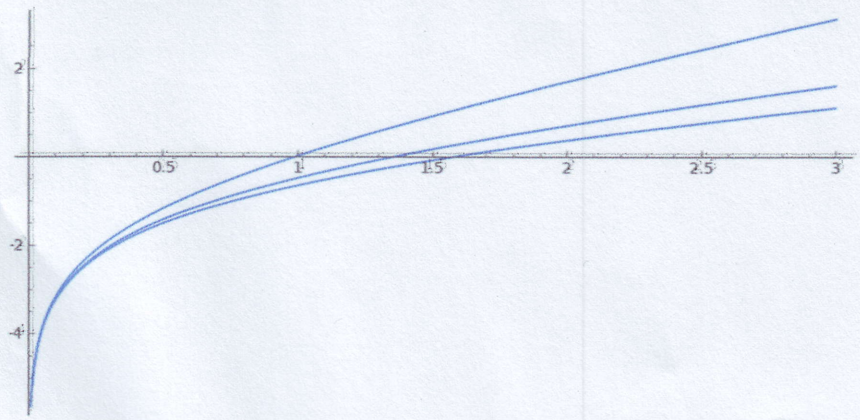
Rappels :

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

exercice 2 (d'après sujet de bac):

Les courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3 sont données à titre indicatif.



Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;\,e[$

2) **a.** Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge.

Contrôle 4 Décembre 2013 Spécialité Terminale S

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   - **a.** Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.
   - **b.** Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   - **c.** En déduire que b divise $p - 1$.