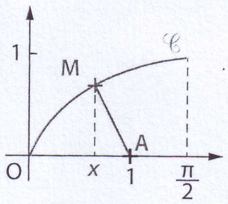
Contrôle n°4 — Tle S

Décembre 2012

Exercice 1

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, de la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin(x)$.

A est le point de coordonnées $(1\,;0)$ et M un point quelconque de $\mathscr{C}$, d'abscisse x.



Le but de l'exercice est de trouver la position de M sur $\mathscr{C}$ pour laquelle la distance AM est minimale.

1. Démontrez que : $AM^2=(x-1)^2+\sin^2(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $I=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x)=(x-1)^2+\sin^2(x).$$

a) Calculez, pour tout x de I, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduisez de la question précédente les variations de f' et dressez son tableau de variation.

c) Démontrez qu'il existe un unique nombre α de I pour lequel $f'(\alpha)=0$.

Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

3. a) Déduisez de la question **2. c)** les variations de f et dressez son tableau de variation.

b) Concluez.

4. On note M_0 le point d'abscisse α.

Démontrez que la tangente en M_0 à la courbe $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à la droite (AM_0).

Indications

① On rappelle la formule suivante

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$$

② Dans la question 2] a), il s'agira de démontrer que f' est strictement croissante sur $[0\,;\pi/2]$

Exercice 3

Donner la définition de

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Démontrer que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Exercice 2

1. f_1 est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_1(x)=2x-2+\ln(x^2+1)$. Étudiez les variations de f_1 et dressez son tableau de variation.

2. n est un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=2x-2+\dfrac{\ln(x^2+1)}{n}$.

a) Démontrez que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) Démontrez que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;+\infty[$.

c) Justifiez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0<\alpha_n<1$.

3. Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_{n+1})>0$.

4. a) Démontrez que la suite (α_n) est croissante.

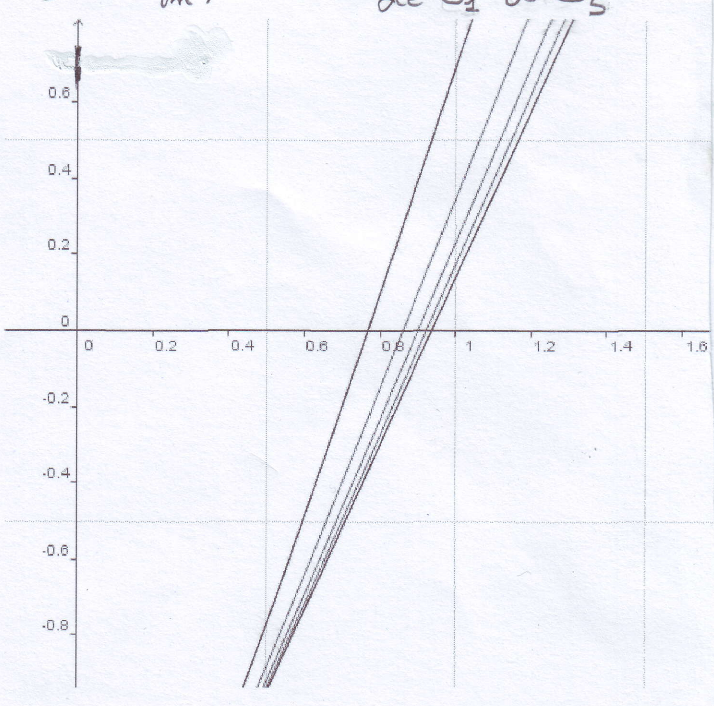
b) Déduisez-en qu'elle est convergente.

c) Utilisez l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ pour déterminer la limite de la suite (α_n).

Courbes pour $n=1$ à 5

$(C_n)=(\mathscr{C}_{f_n})$

de C_1 à C_5



Indication Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I, alors, pour tous réels a et b dans I on a les équivalences

$$a=b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$$
$$a<b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$$
$$a\leqslant b \Leftrightarrow f(a)\leqslant f(b)$$