Contrôle 3 novembre 2013 Terminale S

Partie A

1) Représenter graphiquement la fonction exponentielle et tracer la droite d'équation y=x .
Expliquer succinctement pourquoi, pour tout x dans IR, $e^x - x > 0$

2) Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par $g(x) = e^{-x} - x$
Démontrer que l'équation g(x) = 0 n'a qu'une seule solution dans [0 ; +∞[et en donner un encadrement à 0,1 près.
Dresser le tableau de signe de g sur [0 ; +∞[

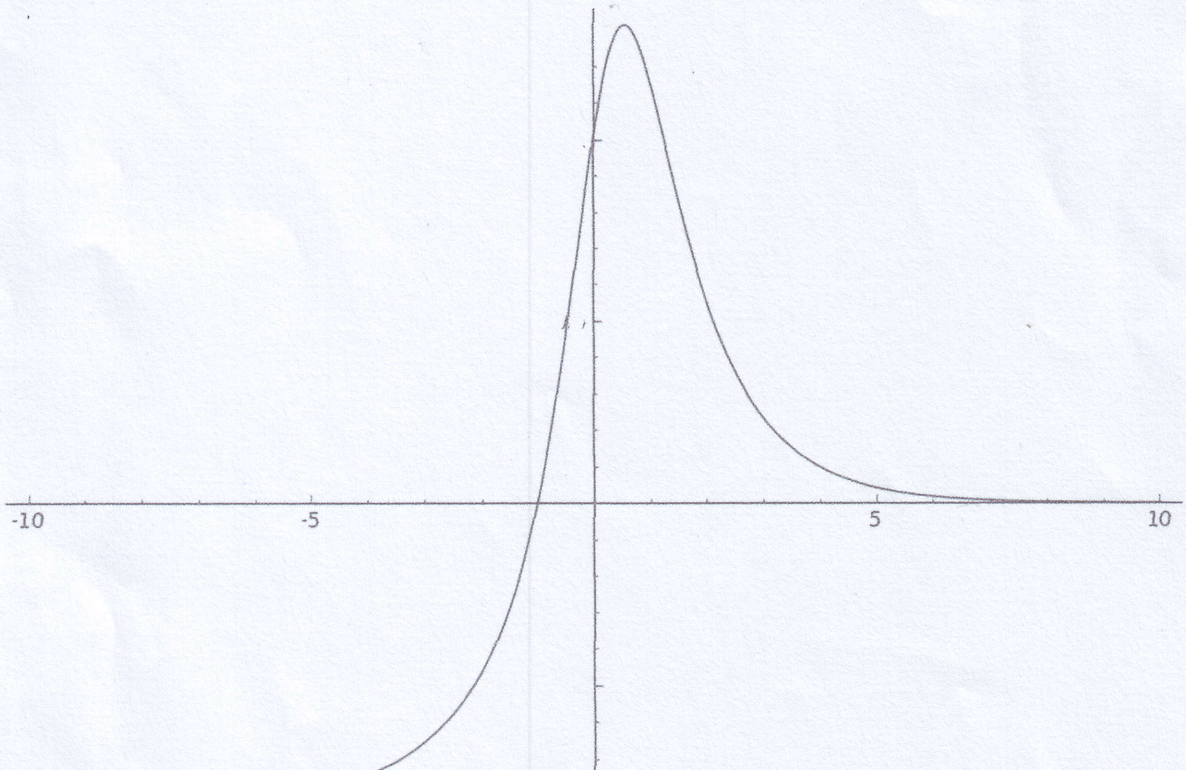
Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{x+1}{e^x - x}$

1) Déterminer les limites de f en +∞ et en -∞.
Vous pourrez utiliser les écritures suivantes de f : $f(x) = \frac{x}{e^x}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right) = \frac{1+\frac{1}{x}}{-1+\frac{e^x}{x}}$
Quelles asymptotes peut-on en déduire ?

2) Démontrer que f'(x) est du signe de $-xe^x + 1$ pour $x \in$ IR
Que peut-on dire du signe de f'(x) pour $x \leq 0$?
Pour x>0 on admet que f'(x) est du même signe que g(x) (g est la fonction de la partie A)
En déduire le signe de f' sur IR et dresser le tableau de variations complet de f sur IR.

Courbe représentative de f à titre indicatif :



Contrôle 3 Novembre 2013 Tle S - spécialité

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
   b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).
   c. Résoudre l'équation (E).
   d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.
   Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
   b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5?
   c. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?