Contrôle n° 3 Novembre 2012 Tle S (1)

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant les conditions

$$\left\{\begin{array}{lll}(1) & : & \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;\,+\infty[,\ f'(x) = 4 - \left[f(x)\right]^2 \\ (2) & : & f(0) = 0\end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à $0,2$.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\left\{\begin{array}{llll}x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} & n, & x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} & n, & y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8\end{array}\right.$$

1. **a.** Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
2. **a.** Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0\,;\,2]$ alors $p(x) \in [0\,;\,2]$.
b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x} - 1}{\mathrm{e}^{4x} + 1}\right)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative.

Supprimée → 1. ~~Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).~~
2. **a.** Montrer que $(\mathscr{C}_g)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
b. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ à l'origine.
4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

Remarque La méthode d'Euler permet de trouver des points "proches" de la courbe représentative d'une fonction f vérifiant (1) et (2).
Il n'est pas utile de connaître ni de comprendre cette méthode : les parties A et B peuvent donc se faire de façon indépendante.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f
   - **a.** Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   - **c.** Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   - **d.** Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considéra la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. ~~Justifier~~ l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ. (égalité $g(\ell) = \ell$ admise)

Supprimée →

4. ~~À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.~~

NOM :

T^{le} S (3)

Annexe exercice 1 du contrôle n°3

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

Partie B