

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$

1) Déterminer les limites aux bornes ouvertes du domaine de définition de f.
Quelle asymptote peut-on en déduire ?

2) Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]-1 ; +\infty[- \{0\}$ et calculer f'(x)

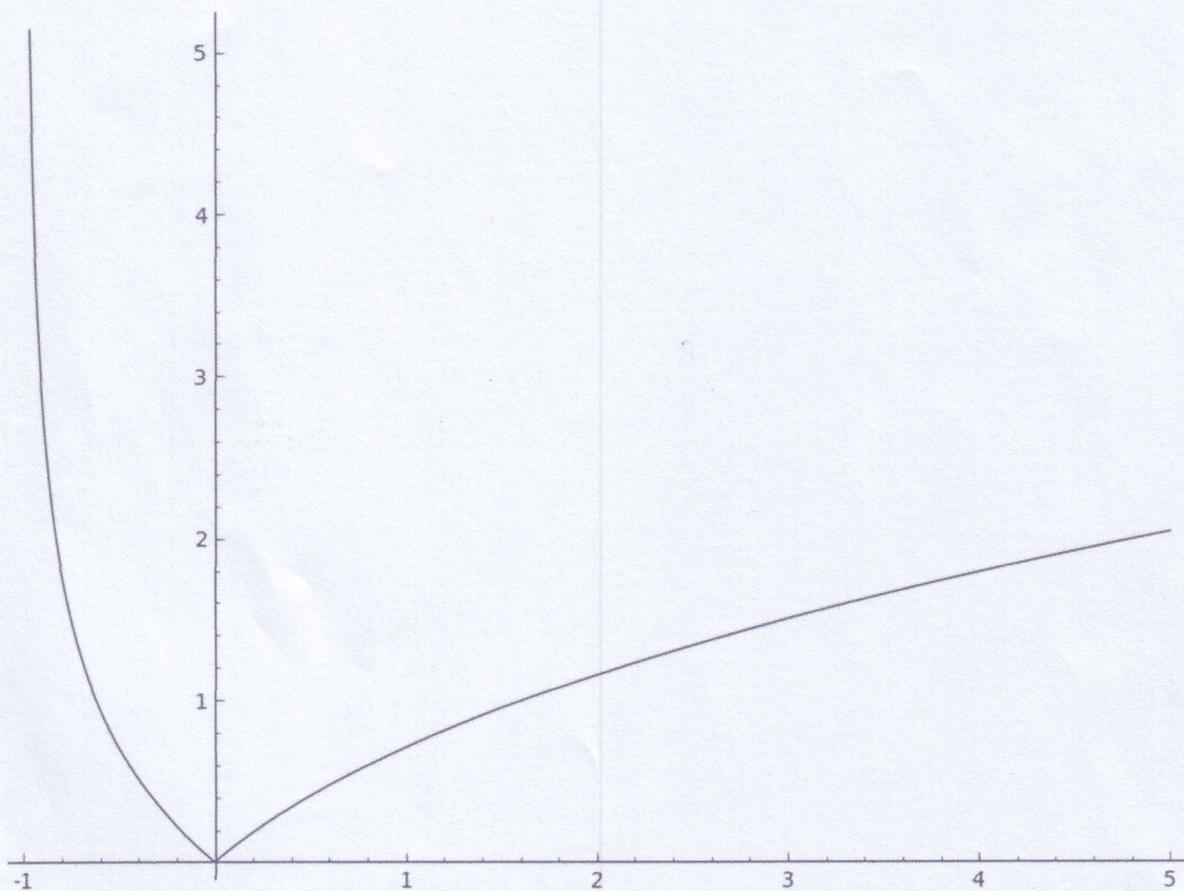
3) Dresser le tableau de variations complet de f sur $]-1 ; +\infty[$

4) On admet que $\frac{f(h)}{h} = \sqrt{\frac{1}{1+h}}$ pour $h > 0$ et

$$\frac{f(h)}{h} = -\sqrt{\frac{1}{1+h}} \text{ pour } h < 0 \text{ et } h > -1$$

Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h}$

Question de recherche : Que peut-on en déduire graphiquement ? (Détaillez votre réponse)



Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$

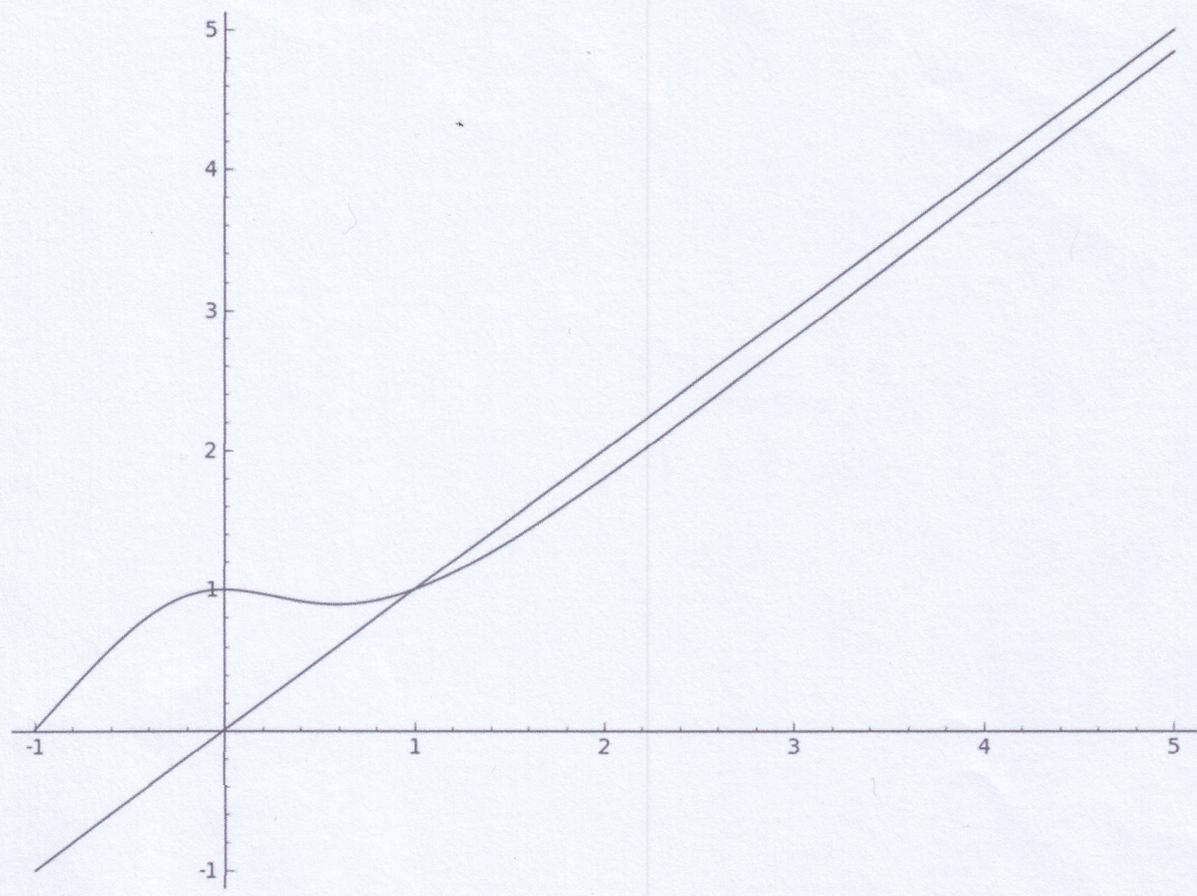
2) Calculer la limite de $(f(x) - x)$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer le signe de $(f(x) - x)$ pour $x \geq -1$.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

3) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + 3x - 2$

Dresser le tableau de variations complet de g sur IR et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans IR qui sera encadrée à 0,01 près.

4) Calculer f'(x) pour $x \geq -1$

5) Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1 ; +\infty[$.



Exercice 3 :

1) Donner le reste de la division euclidienne de $3n+1$, $3n+6$ et $15n+1$ par 10 selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$. (Utiliser un tableau de congruences)

Justifier que 3 est premier avec 10 mais pas avec 15

Conjecturer dans quel cas l'implication suivante est vraie :

$$an_1+b \equiv an_2+b \pmod{10} \Rightarrow n_1 \equiv n_2 \pmod{10} \text{ où } a, b, n_1 \text{ et } n_2 \text{ sont des entiers}$$

Question de recherche : Démontrer votre conjecture

2) Soit $A=3n+9$ et $B=2n+5$ où n est un entier .

Vérifier que $2A-3B = 3$

Quelle peut-être alors la valeur du PGCD de A et de B ?

Pour quelles valeurs de n B est-il divisible par 3 ? (Vous pouvez utiliser un tableau de congruences).

Donner les valeurs de n pour lesquelles A et B sont premiers entre eux . (Vous examinerez les 2 cas suivants : 3 divise B et 3 ne divise pas B)