Contrôle n°1

2013 SPECIALITÉ Tle S

1] Question de cours $\boxed{\text{Supprimée}}$

a b c d sont 4 entiers

et $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrer la proposition suivante

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ c \equiv d\ (n) \end{array}\right\} \Longrightarrow ac \equiv bd\ (n)$$

(Prérequis : la définition et la proposition équivalente à la définition d'une congruence)

---

a, b et c désignent trois entiers

2] a) A l'aide d'un tableau de congruences modulo 7

Déterminer les restes possibles de la division euclidienne

de a^2 par 7 $\forall a \in \mathbb{Z}$

b) Démontrer que 7 divise $a^2+b^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 7 \text{ divise } a \\ \text{et} \\ 7 \text{ divise } b \end{cases}$

(Vous pourrez faire un tableau de congruences modulo 7 à double entrées)

c) On suppose que les 3 entiers a, b et c vérifient la relation :

$$a^2+b^2=7c^2$$

Démontrer que 7 divise a, b et c

3] Déterminer le reste de la division euclidienne

de 2010^{2010} par 7

puis celui de

2011^{2011} par 7 (vous pourrez vérifier que $2^3 \equiv 1\ (7)$)

Contrôle n°1 | Septembre 2013 | Tale S

Exercice n° 1
(obligatoire)

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbf{R}$).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

Résultat admis →

1. ~~Démontrer que~~ si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ vérifie la relation $f(\ell) = \ell$.
2. Supposons $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.
   (a) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
3. Supposons maintenant $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0, 1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   (b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
   – montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;
   – établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
4. On a représenté sur la feuille annexe la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.
   Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, $u_2, \ldots$
   En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Exercice 2 : (obligatoire)

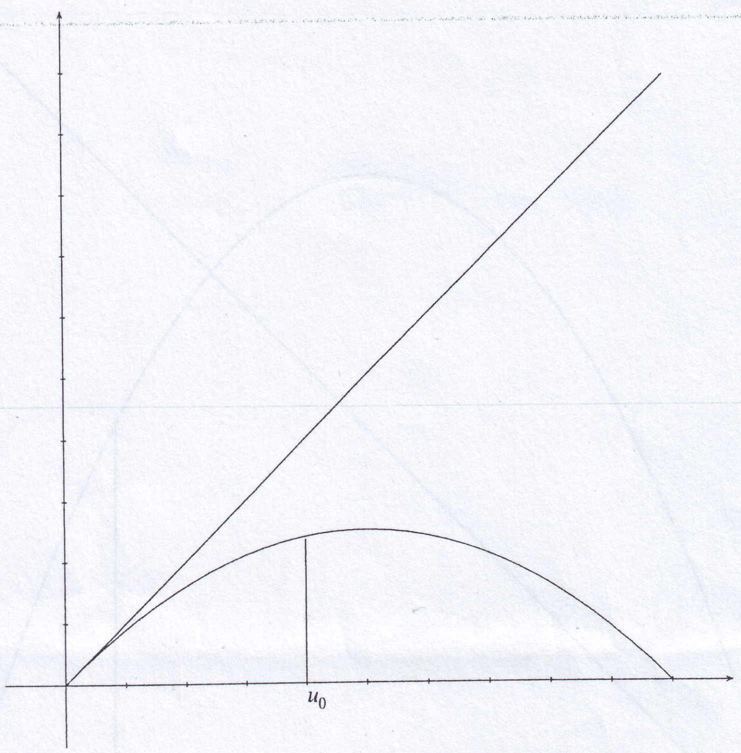
1) Rappeler la définition de $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$
2) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n})=+\infty$

NOM :

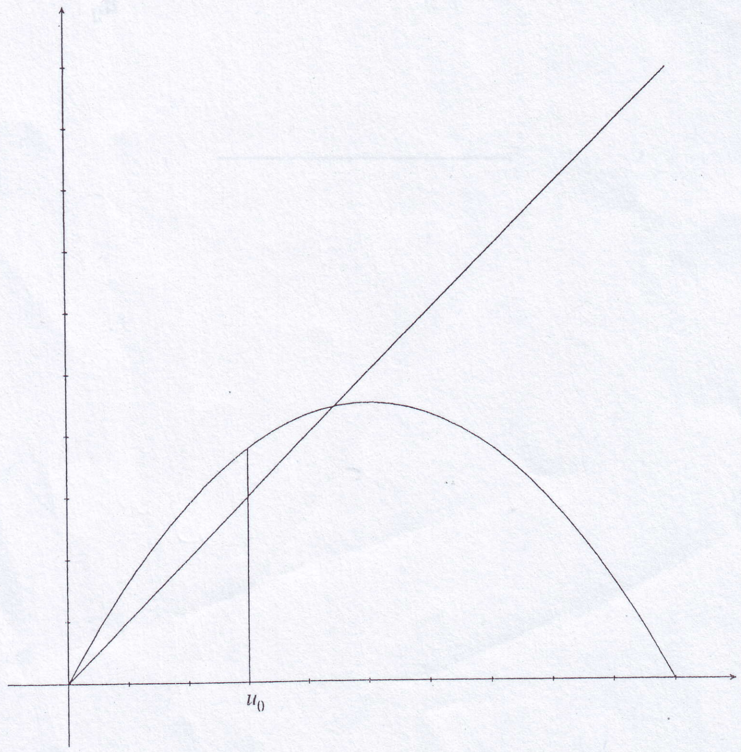
TleS1

Feuille annexe à rendre avec la copie

1^er^ cas : $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.



2^e^ cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



3^{e} cas : $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.