Contrôle n°1 le 02/10/12 — T^a 5 — 2012 - 2013 — (1)

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$. (On admettra que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in]-2, +\infty[$)
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Vous admettrez le résultat suivant :
« Si la suite (u_n) converge vers l
Alors la suite (v_n) définie $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
converge aussi vers l »

EXERCICE 2

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\,;\,2]$ alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes en laissant apparents tous les traits de construction.

   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

   Supprimé mais résultats admis

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et
   $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

   Supprimé mais résultat admis

   d. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.

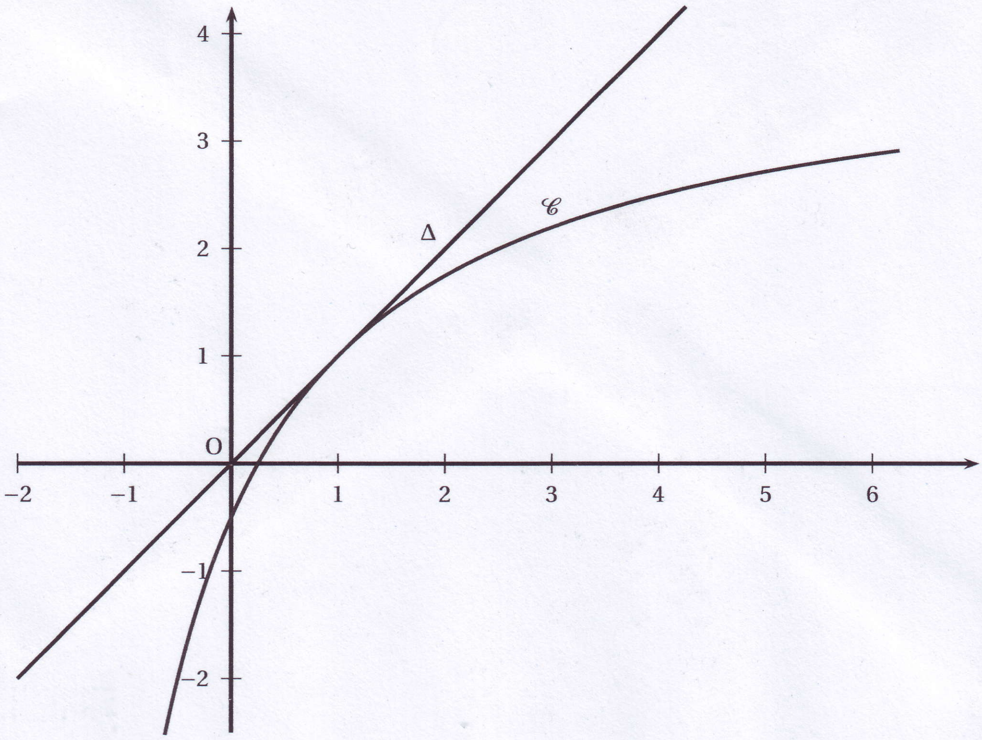
   → Aucune justification n'est demandée

Pour la question 2] c) vous aurez à étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) et à considérer la suite w_n avec $w_n = v_n - u_n$

NOM. (3)

exercice 1

(à rendre avec la copie)



exercice 2