

EXERCICE (pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. a. Calculer : $(1+\sqrt{6})^2$, $(1+\sqrt{6})^4$, $(1+\sqrt{6})^6$.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$$(1+\sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question 1a, donner d'autres valeurs de a_n et b_n .

a. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

b. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + 5b_n$.

Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$ par un raisonnement par l'absurde.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.
