Contrôle n° 5 Janvier 2015 T^{a}S

Exercice 1

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

   b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

   c. Préciser la valeur de α_1.

   d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

   b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

   $$h(x) = \ln x - x + 1.$$

   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

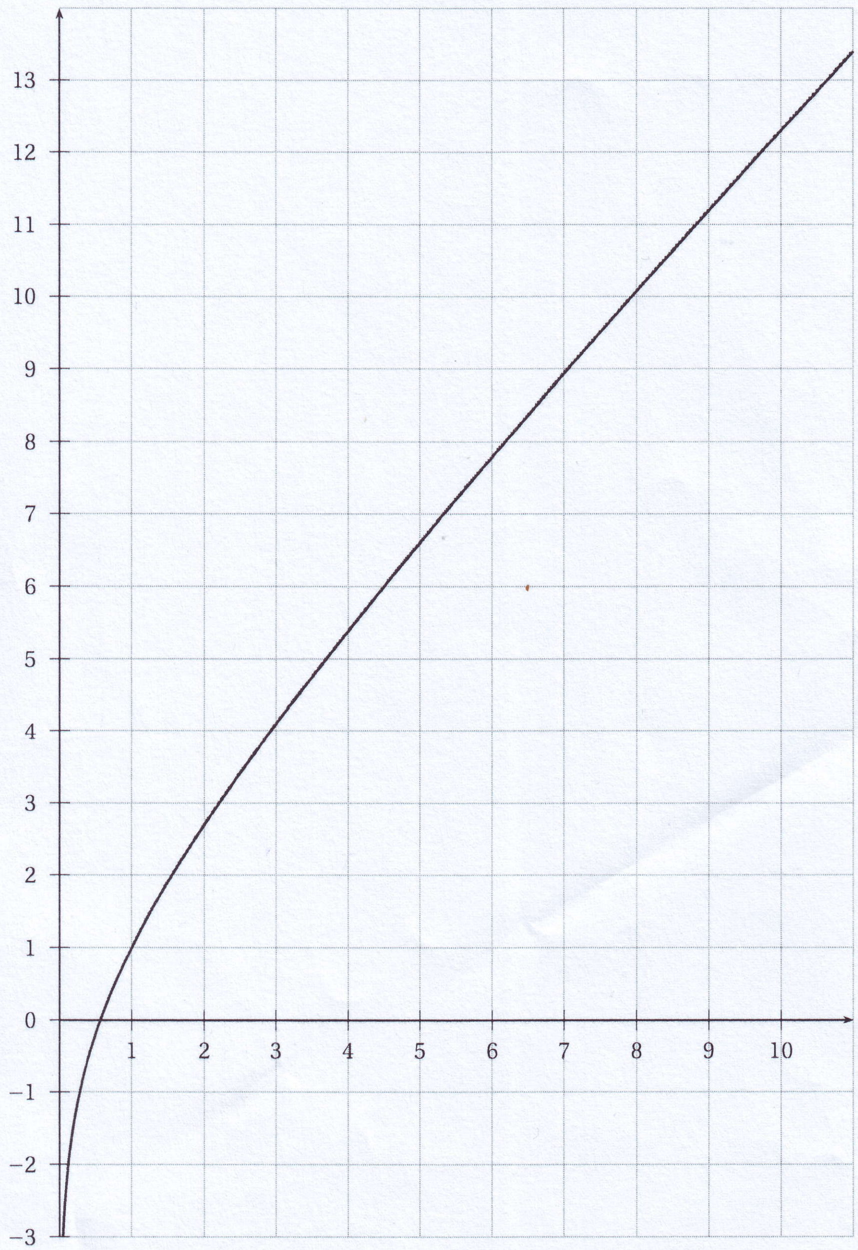
   c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 1



Exercice 2

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$

1) En posant X= e^{x} , déterminer le signe de $e^{2x}-e^{x}+1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

   Les limites aux bornes seront justifiées et les valeurs des coordonnées des éventuels extrémums seront exactes.
3) Démontrer que $f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

   En déduire que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 0$

Courbe à titre indicatif